Dumitru Buşneag **Dana Piciu**

COMPLEMENTE
de
ALGEBRĂ

2006

Prefață

Această carte, strucurată pe 12 capitole, cuprinde anumite chestiuni de algebră, care, deşi nu se aprofundează suficient de mult în cadrul anilor de licență de la facultățile de matematică (şi nu numai !), sunt totuşi foarte importante pentru ceea ce numim de obicei **cultura matematică** a unui matematician; de aici şi denumirea de Complemente de algebră!.

Punctul de start (ca idee!) pentru elaborarea acestei monografii este lucrarea [5] scrisă de D. Buşneag în colaborare cu I. V. Maftei (în perioada când primul era profesor de matematică la Colegiul național "Carol I" din Craiova). La elaborarea acestei cărți s-au folosit şi anumite părți din lucrările [7-15] publicate de autori la Editura Universitaria a Universității din Craiova.

De asemenea, lucrarea conține şi rezultate preluate într-un nou context din lucrări de referință ale literaturii matematice (vezi Bibliografia); când anumite rezultate sau demonstrații au fost luate *ad literam* din alte lucrări am menționat în mod expres lucrul acesta.

Cititorului nu-i sunt necesare cunoştințe vaste de matematică pentru a studia această lucrare ; lui trebuie să-i fie totuşi familiare noțiunile şi notațiile de bază din matematică.

Capitolele 1-5 sunt dedicate prezentării principalelor mulțimi de numere (naturale, întregi, raționale, reale şi complexe) împreună cu principalele operații algebrice ce se definesc pe ele şi care sunt foarte des întâlnite în orice ramură a matematicii. De asemenea, se fac referiri legate de relațiile naturale de ordine de pe aceste mulțimi.

În **Capitolul 6** se prezintă câteva principii de rezolvare a problemelor de matematică foarte des întâlnite. Este vorba de principiul lui *Dirichlet* (sau al cutiei), cel al *inducției matematice* precum şi cel al *includerii şi excluderii*.

Capitolul 7 conține chestiuni legate de anumite clase de funcții : injective, surjective, bijective, pare, impare, periodice, convexe şi concave.

Capitolul 8 este dedicat studiului unor inegalități de bază foarte des întâlnite în matematică (atât formele discrete, iar pentru unele chiar şi formele continue şi integrale).

Capitolul 9 conține anumite rezultate de bază din teoria grupurilor finite. În finalul capitolului se prezintă un tabel de caracterizare a grupurilor finite cu cel mult 15 elemente.

Capitolul 10 conține complemente de algebră liniară (determinanți, matrice, vectori şi valori proprii, etc).

Această lucrare se adresează în primul rând studenților de la facultățile de matematică şi informatică, ea putând fi însă utilizată şi de profesorii de matematică din învățământul preuniversitar atât în cadrul procesului de perfecționare cât şi ca teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor.

Ultimele două capitole ale lucrării conțin exerciții legate de teoria prezentată în primele 10 capitole (**Capitolul 11** conține enunțurile iar **Capitolul 12** soluțiile complete ale acestora). Majoritatea exercițiilor selecționate au făcut obiectul problemelor propuse la tradiționalele concursuri de matematică ale elevilor (**OM -** Olimpiada națională de matematică sau **OIM -** Olimpiada internațională de matematică). Este un motiv în plus de a considera că această lucrare este foarte utilă şi elevilor din ciclul liceal în pregătirea concursurilor şcolare care sunt din ce în ce mai dificile, solicitând nu numai dexteritate în rezolvarea problemelor ci şi o solidă cultură matematică !

O mare parte din noțiunile incluse în această lucrare fac obiectul unui curs special de algebră intitulat chiar **Complemente de algebră** pe care D. Buşneag îl predă studenților din anul terminal de la Facultatea de de Matematică – Informatică a Universității din Craiova.

În finalul lucrării am prezentat indexul autorilor problemelor incluse în lucrare; dacă am omis un nume ne cerem anticipat scuze ! .

Ne face o deosebită plăcere să mulțumim Domnilor profesori universitari de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universității din Bucureşti **Constantin Năstăsescu** – Membru Corespondent al Academiei Române şi **Constantin Niță** pentru discuțiile purtate pe tema acestei lucrări, discuții care au condus la structura ei în actuala formă.

Craiova, 1.11.2006 Autorii

CUPRINS

Capitolul 1: Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$

Capitolul 2: Inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Capitolul 3: Corpul numerelor raționale $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

Capitolul 4: Corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Capitolul 5: Corpul numerelor complexe $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Capitolul 6 : Câteva principii de rezolvare a problemelor de matematică

Capitolul 7 : Clase de funcții

Capitolul 8 : Inegalități

Capitolul 9 : Grupuri finite

Capitolul 10 : Complemente de algebră liniară

Capitolul 1
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE $\mathbb{N}$

Dumnezeu a creat numerele naturale – restul este munca omului.

(L. Kronecker)

1.1. Triplete Peano

Definiția 1.1.1. Numim *triplet Peano* un triplet (N, 0, s) unde N este o mulțime nevidă, $0\in N$ iar $s:N\to N$ este o funcție astfel încât sunt verificate axiomele :

P_1 : $0 \notin s(N)$;

P_2 : s este o funcție injectivă ;

P_3 : dacă $P\subseteq N$ este o submulțime astfel încât $0\in P$ şi ($n\in P \Rightarrow s(n)\in P$), atunci $P=N$.

În cele ce urmează, acceptăm ca axiomă existența unui triplet Peano (cititorului dornic de aprofundarea acestei chestiuni îi recomandăm lucrările [17] şi [38]) .

Lema 1.1.2. Dacă (N, 0, s) este un triplet Peano, atunci $N=\{0\}\cup s(N)$.

Demonstrație. Dacă notăm $P=\{0\}\cup s(N)$, atunci $P\subseteq N$ şi cum P verifică P_3, deducem că $P=N$. ■

Teorema 1.1.3. Fie (N, 0, s) un triplet Peano iar (N′, 0′, s ′) un alt triplet format dintr-o mulțime nevidă N′, un element $0'\in N'$ şi o funcție $s':N' \to N'$. Atunci :

(i) Există o unică funcție $f:N\to N'$ astfel încât $f(0)= 0'$, iar diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & N' \arrow[d, "s'"] \\ N \arrow[r, "f"'] & N' \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $f \circ s = s'\circ f$);

(ii) Dacă (N′, 0′, s′) este un triplet Peano, atunci f este bijecție.

Demonstrație. (i). Pentru a proba existența lui f, vom considera toate relațiile $R\subseteq N\times N'$ astfel încât :

r_1 : $(0, 0') \in R$

r_2 : Dacă $(n, n')\in R$, atunci $(s(n), s'(n'))\in R$ iar prin R_0 vom nota intersecția acestor relații .

Vom demonstra că R_0 este o relație funcțională şi astfel f va fi funcția ce va avea drept grafic pe R_0 (astfel, din $(0, 0')\in R_0$ vom deduce că $f (0)=0'$ iar dacă $n\in N$ şi $f (n)= =n'\in N'$, $(n , n')\in R_0$, deci $(s(n), s'(n'))\in R_0$, adică, $f(s(n))=s'(n')=s'(f (n))$. Pentru a demonstra că R_0 este o relație funcțională, vom demonstra că pentru orice $n\in N$, există

$n'\in N'$ astfel încât $(n, n')\in R_0$ iar dacă pentru $n\in N$ şi $n', n''\in N'$ avem $(n, n')\in R_0$ şi $(n, n'')\in R_0$, atunci $n'= n''$.

Pentru prima parte, fie $P=\{n\in N$: există $n'\in N'$ astfel încât $(n, n')\in R_0\}\subseteq N$.

Cum $(0, 0')\in R_0$ deducem că $0\in P$. Fie acum $n\in P$ şi $n'\in N'$ astfel încât $(n, n')\in R_0$. Din definiţia lui R_0 deducem că $(s(n), s'(n'))\in R_0$; obţinem că $s(n)\in P$ şi cum $(N, 0, s)$ este triplet Peano, deducem că $P=N$.

Pentru a doua parte, fie

$$Q=\{n\in N : \text{dacă } n', n''\in N' \text{ şi } (n, n'), (n, n'')\in R_0 \Rightarrow n'= n''\}\subseteq N$$

şi să demonstrăm la început că $0\in Q$.

În acest sens, vom demonstra că dacă $(0, n')\in R_0$ atunci $n'=0'$. Dacă prin absurd, $n'\neq 0'$, atunci vom considera relaţia $R_1=R_0 \setminus\{(0, n')\}\subseteq N\times N'$. Din $n'\neq 0'$ deducem că $(0, 0')\in R_1$ iar dacă pentru $m\in N'$ avem $(n, m)\in R_1$, atunci $(n, m)\in R_0$ şi $(n, m) \neq (0, n')$. Astfel $(s(n), s'(m))\in R_0$ şi cum $(s(n), s'(m)) \neq (0, n')$ (căci $s(n) \neq 0$ conform cu P_1), deducem că $(s(n), s'(m))\in R_1$. Cum R_1 verifică r_1 şi r_2 ar trebui ca $R_0\subseteq R_1$ – absurd (căci R_1 este inclusă strict în R_0).

Pentru a proba că $0\in Q$, fie $n', n''\in N'$ astfel încât $(0, n')$, $(0 , n'')\in R_0$. Atunci, ţinând cont de cele stabilite mai sus, deducem că $n'=n''=0'$, deci $0\in Q$.

Fie acum $n\in Q$ şi $n'\in N'$ astfel încât $(n, n')\in R_0$; vom demonstra că dacă $(s(n), n'')\in R_0$, atunci $n''=s'(n')$. Să presupunem prin absurd că $n''\neq s'(n')$ şi să considerăm relaţia $R_2 =R_0 \setminus\{(s (n), n'')\}$. Vom demonstra că R_2 verifică r_1 şi r_2 .

Într–adevăr, $(0,0')\in R_2$ (căci $0 \neq s(n)$) iar dacă $(p, p')\in R_2$, atunci $(p, p') \in R_0$ şi $(p, p')\neq (s(n), n'')$.

Deducem că $(s(p), s'(p'))\in R_0$ şi dacă presupunem $(s(p), s'(p'))=(s(n), n'')$, atunci $s(p) =s(n)$, deci $p=n$. De asemenea, $s'(p')=n''$. Atunci $(n, n')\in R_0$ şi $(n, p')\in R_0$ iar cum $n\in Q$ $\Rightarrow n'=p'$, deci $n''=s'(p')=s'(n')$, ceea ce contrazice faptul că $n''\neq s(n')$. Prin urmare, $(s(p), s'(p')) \neq (s(n), n'')$, ceea ce ne arată că $(s(p), s'(p'))\in R_2$, adică R_2 satisface r_1 şi r_2 . Din nou ar trebui ca $R_0\subset R_2$ – absurd !.

Deci $(s(n), n'')\in R_0 \Rightarrow n''=s'(n')$ astfel că dacă $r, s \in N'$ şi $(s(n), r)$, $(s(n), s)\in R_0$, atunci $r = s = s'(n')$, adică $s(n)\in Q$, deci $Q=N$.

Pentru a proba unicitatea lui f, să presupunem că mai există $f':N\rightarrow N'$ astfel încât $f'(0)=0'$ şi $s'(f'(n))=f'(s(n))$ pentru orice $n\in N$.

Considerând $P=\{n\in N : f(n)=f'(n)\}\subseteq N$, atunci $0\in P$ iar dacă $n\in P$ (adică $f(n)=f'(n)$), atunci $s'(f(n))=s'(f'(n))\Rightarrow f(s(n))=f'(s(n))\Rightarrow s(n)\in P$ şi atunci $P=N$, adică $f=f'$.

(ii). Să arătăm la început că f este injectivă. Pentru aceasta vom considera $P=\{n\in N : \text{dacă } m\in N \text{ şi } f(m)=f(n)\Rightarrow m=n\}\subseteq N$ şi să demonstrăm la început că $0\in P$. Pentru aceasta fie $m\in N$ astfel încât $f(0)=f(m)$ şi să demonstrăm că $m=0$. Dacă prin absurd $m\neq 0$, atunci $m=s(n)$ cu $n\in N$ iar egalitatea $f(m)=f(0)$ devine $f(s(n))=f(0)=0'$, de unde $s'(f(n))=0'$, ceea ce este absurd deoarece prin ipoteză $(N', 0', s')$ este un triplet Peano.

Fie acum $n\in P$; pentru a demonstra că $s(n)\in P$, fie $m\in N$ astfel încât $f(m)=f(s(n))$.

Atunci $m\neq 0$ (căci în caz contrar ar rezulta că $0'=f(0)=f(s(n))=s'(f(n))$, absurd !), deci conform Lemei 1.1.2, $m=s(p)$ cu $p\in N$ iar egalitatea $f(m)=f(s(n))$ devine

$f(s(p))=f(s(n)) \Leftrightarrow s'(f(p))=s'(f(n))$, adică $f(p)=f(n)$ şi cum $n \in P$, atunci $n=p$ şi astfel $m=s(p)=s(n)$.

Pentru a demonstra surjectivitatea lui f să considerăm

$$P'=\{n' \in N' : \text{există } n \in N \text{ astfel încât } n'=f(n)\} \subseteq N'.$$

Cum $f(0)=0'$ deducem că $0' \in P'$. Fie acum $n' \in P'$; atunci există $n \in N$ astfel încât $n'=f(n)$. Deoarece $s'(n')=s'(f(n))=f(s(n))$, deducem că $s'(n') \in P'$ şi cum tripletul $(N', 0', s')$ este un triplet Peano, deducem că $P'=N'$, adică f este şi surjectivă, deci bijectivă . ■

Observaţie. Conform Teoremei 1.1.3 (cunoscută şi sub numele de *teorema de recurenţă*) un triplet Peano este unic până la o bijecţie.

În cele ce urmează vom alege un triplet Peano oarecare $(\mathbb{N}, 0, s)$ şi pe care îl vom fixa ; elementele lui $\mathbb{N}$ le vom numi *numere naturale* .

Elementul 0 va purta numele de *zero* . Notăm $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Vom nota $1=s(0)$, $2=s(1)$, $3=s(2)$, e.t.c., astfel că $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Funcţia s poartă numele de *funcţia succesor* . Axiomele $P_1 - P_3$ sunt cunoscute sub numele de *axiomele lui Peano* .

Axioma P_3 poartă numele de *axioma inducţiei matematice*.

1.2. Adunarea numerelor naturale

Teorema 1.2.1. Există o unică operaţie algebrică pe $\mathbb{N}$ pe care o vom nota prin „+" şi o vom numi *adunarea numerelor naturale* astfel încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ să avem :

A_1 : $0+m=m$;

A_2 : $s(n)+m=s(n+m)$.

Demonstraţie. Să probăm la început unicitatea şi pentru aceasta să presupunem că mai există o operaţie algebrică $\oplus$ pe $\mathbb{N}$ astfel încât sunt verificate A_1 şi A_2.

Fie $P=\{n \in \mathbb{N} : n+m=n \oplus m, \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

Din A_1 deducem că $0 \in P$ iar din A_2 deducem că dacă $n \in P$, atunci $s(n)+m=s(n) \oplus m \Leftrightarrow s(n+m)=s(n \oplus m)$, ceea ce este adevărat deoarece s este injectivă şi am presupus că $n \in P$. Deci $P=\mathbb{N}$, adică cele două operaţii coincid.

Considerăm un element $m \in \mathbb{N}$ (pe care îl fixăm) şi tripletul $(\mathbb{N}, m, s)$; conform Teoremei 1.1.3 există o unică funcţie $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f_m(0)=m$ şi $s(f_m(n))=f_m(s(n))$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ definim $n+m=f_m(n)$. Atunci $0+m=f_m(0)=m$ iar $s(n)+m= =f_m(s(n)) = s(f_m(n)) = s(n+m)$. ■

Observaţie. Axiomele A_1–A_2 poartă numele de *axiomele adunării numerelor naturale*.

Propoziţia 1.2.2. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

A_1^0 : $n+0=n$;

A_2^0 : $n+s(m)= s(n+m)$.

Demonstraţie. Fie $P=\{m \in \mathbb{N} : m+0=m\} \subseteq \mathbb{N}$. Dacă în A_1 facem pe $m=0$, deducem că $0+0=0$, adică $0 \in P$. Dacă $m \in P$, (adică $m+0=m$), atunci $s(m)+0=s(m+0)=s(m)$, adică $s(m) \in P$, deci $P=\mathbb{N}$. Analog se probează şi a doua relaţie.■

Propoziția 1.2.3. Dubletul ($\mathbb{N}$, +) este monoid comutativ cu proprietatea de simplificare.

Demonstrație. Din cele stabilite anterior, deducem că 0 este element neutru pentru adunarea numerelor naturale.

Pentru a proba comutativitatea adunării să considerăm

$$P=\{n\in\mathbb{N} : n+m=m+n \text{ pentru orice } m\in\mathbb{N}\} \subseteq\mathbb{N} .$$

Evident $0\in P$. Dacă $n\in P$, adică $n+m=m+n$ pentru orice $m\in\mathbb{N}$, atunci $s(n)+m=m+s(n) \Leftrightarrow s(n+m)=s(m+n) \Leftrightarrow n+m=m+n$, ceea ce este adevărat. Deducem că $P=\mathbb{N}$, adică adunarea numerelor naturale este comutativă .

Pentru a demonstra asociativitatea adunării numerelor naturale, să considerăm

$$P =\{n\in\mathbb{N}: (n+m)+p=n+(m+p) \text{ pentru orice } m, p\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}.$$

Evident $0\in P$. Fie acum $n\in P$. Atunci $(s(n)+m)+p=s(n+m)+p=s((n+m)+p)$ iar $s(n)+(m+p)=s(n+(m+p))$ şi cum $(n+m)+p=n+(m+p)$ deducem că $s(n)\in P$, adică $P=\mathbb{N}$.

Pentru partea finală fie

$$P=\{p\in\mathbb{N} : \text{dacă } m+p=n+p \Rightarrow m=n\}\subseteq\mathbb{N}.$$

Evident $0\in P$ şi să presupunem că $p\in P$. Atunci $m+s(p)=n+s(p) \Leftrightarrow s(m+p)=s(n+p) \Leftrightarrow m+p=n+p \Leftrightarrow m=n$ (căci $p\in P$), adică $s(p)\in P$ şi astfel din nou $P=\mathbb{N}$. ■

Observație. Dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $s(n)=s(n+0)=n+s(0)=n+1$.

Propoziția 1.2.4. Dacă $m, n\in\mathbb{N}$ şi $m+n = 0$, atunci $m = n = 0$.

Demonstrație. Dacă $m \neq 0$ sau $n \neq 0$, atunci există $p, q\in\mathbb{N}$ astfel încât $m = s(p)$ sau $n = s(q)$. În primul caz, obținem că $m+n = s(p)+n = s(p+n) \neq 0$ – absurd ! şi analog în al doilea caz. Deci $m = n = 0$. ■

1.3. Înmulțirea numerelor naturale

Propoziția 1.3.1. Există o unică operație algebrică pe $\mathbb{N}$ notată „·” şi numită *înmulțirea numerelor naturale* astfel încât pentru orice $m, n\in\mathbb{N}$ să avem :

I_1 : $m\cdot 0 = 0$;

I_2 : $m\cdot s(n) = mn+m$.

Demonstrație. Fie $m\in\mathbb{N}$ fixat ; considerând tripletul ($\mathbb{N}$, 0, f_m), unde $f_m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ este definită prin $f_m(n)=n+m$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, atunci conform Teoremei 1.1.3. există o unică funcție $g_m :\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $g_m(0)=0$ şi $f_m\circ g_m = g_m\circ s$.

Definim $m\cdot n=g_m(n)$ şi astfel $m\cdot 0=g_m(0)=0$ iar $m\cdot s(n)=g_m(s(n))= f_m(g_m(n))=f_m(m\cdot n)= =m\cdot n+m$. Unicitatea operației de înmulțire cu proprietățile I_1 şi I_2 se probează ca în cazul adunării. ■

Observație. I_1 şi I_2 poartă numele de *axiomele înmulțirii numerelor naturale.*

În cele ce urmează, dacă nu este pericol de confuzie, vom scrie $m\cdot n= mn$ pentru $m, n\in\mathbb{N}$.

Analog ca în cazul adunării numerelor naturale, se demonstrează că pentru oricare numere naturale m, n avem :

I_1^0 : $0\cdot m = 0$;

I_2^0 **: s(n)·m = nm+m.**

Lema 1.3.2. Înmulțirea numerelor naturale este distributivă la stânga față de adunarea numerelor naturale.

Demonstrație. Fie $P=\{p\in\mathbb{N} : m(n+p) = mn+mp$ pentru oricare $m, n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}$.

Ținând cont de A_1 şi I_1 deducem că $0\in P$.

Să presupunem acum că $p\in P$ şi fie $m, n\in\mathbb{N}$.

Avem $m(n+s(p))=m(s(n+p))=m(n+p)+m=mn+mp+m=mn+ms(p)$, adică $s(p)\in P$ şi astfel $P=\mathbb{N}$. ■

Propoziția 1.3.3. Dubletul $(\mathbb{N}, \cdot)$ este monoid comutativ.

Demonstrație. Pentru a proba asociativitatea înmulțirii fie

$$P=\{p\in\mathbb{N} : (mn)p = m(np) \text{ pentru oricare } m, n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}.$$

În mod evident, $0\in P$. Să presupunem acum că $p\in P$ şi să demonstrăm că $s(p)\in P$. Avem $(mn)s(p)=(mn)p+mn$ iar $m(ns(p))=m(np+n)=m(np)+mn$ (conform Lemei 1.3.2), de unde egalitatea $(mn)s(p)=m(ns(p))$, adică $s(p)\in P$, deci $P=\mathbb{N}$.

Deoarece pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $n\cdot1=n\cdot s(0)=n\cdot0+n=n$ iar $1\cdot n=s(0)\cdot n=0\cdot n+n=n$ deducem că 1 este elementul neutru al înmulțirii numerelor naturale.

Pentru a proba comutativitatea înmulțirii numerelor naturale fie

$$P=\{n\in\mathbb{N} : nm=mn \text{ pentru orice } m\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}.$$

În mod evident $0\in P$ şi să presupunem că $n\in\mathbb{N}$.

Atunci pentru orice $m\in\mathbb{N}$, $s(n)\cdot m=n\cdot m+m$ iar $m\cdot s(n)=mn+m$, de unde $s(n)\cdot m=m\cdot s(n)$, adică $s(n)\in P$, deci $P=\mathbb{N}$. ■

1.4. Relația naturală de ordine de pe $\mathbb{N}$

Definiția 1.4.1. Pentru $m, n\in\mathbb{N}$ vom scrie $m\leq n$ (şi vom spune că m este *mai mic sau egal* decât n sau că n este *mai mare sau egal* decât m) dacă există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $m+p=n$; convenim în acest caz să notăm $p=n-m$.

Dacă $p\in\mathbb{N}^*$, atunci $m\leq n$ şi $m\neq n$; în acest caz vom scrie $m<n$ şi vom spune că m este *strict mai mic* decât n.

Lema 1.4.2. Dacă $m, n\in\mathbb{N}$ şi $m<n$, atunci $s(m)\leq n$.

Demonstrație. Deoarece $m<n$, există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $m+p=n$. Cum $p\in\mathbb{N}^*$, există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $p=s(k)$ (conform Lemei 1.1.2). Atunci din $m+p=n$ deducem că $m+s(k)=n$ $\Rightarrow s(m+k)=n \Rightarrow s(m)+k=n \Rightarrow s(m)\leq n$. ■

Corolar 1.4.3. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n<s(n)$.

Propoziția1.4.4. Dubletul $(\mathbb{N},\leq)$ este o mulțime total ordonată.

Demonstrație. Deoarece pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n+0=n$ deducem că $n\leq n$, adică relația $\leq$ este reflexivă. Fie acum $m, n\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\leq n$ şi $n\leq m$. Atunci există $p, q\in\mathbb{N}$ astfel încât $m+p=n$ şi $n+q=m$. Deducem că $n+(p+q)=n$, de unde $p+q=0$ (conform Propoziției 1.2.3), iar de aici $p=q=0$ (conform Propoziției 1.2.4), adică $m=n$, deci relația $\leq$ este antisimetrică .

Fie acum m, n, p$\in\mathbb{N}$ astfel încât m$\leq$ n şi n$\leq$ p. Atunci există r, s$\in\mathbb{N}$ astfel încât m+r=n şi n+s=p. Deducem imediat că m+(r+s)=p, adică m$\leq$p, deci relația $\leq$ este şi tranzitivă, adică $\leq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{N}$.

Pentru a proba că ordinea $\leq$ de pe $\mathbb{N}$ este totală, fie m$\in\mathbb{N}$ fixat iar

$$P_m=\{n\in\mathbb{N}: n\leq m \text{ sau } m\leq n\}\subseteq\mathbb{N}.$$

În mod evident $0\in P_m$ şi fie $n\in P_m$. Dacă n=m, atunci cum n<s(n) avem m<s(n), adică $s(n)\in P_m$. Dacă n<m, atunci conform Lemei 1.4.2 avem s(n)$\leq$m şi din nou $s(n)\in P_m$. Dacă m<n, cum n<s(n) avem că m<s(n) şi din nou $s(n)\in P_m$. Rezultă că $P_m=\mathbb{N}$ şi cum m este oarecare deducem că ordinea $\leq$ de pe $\mathbb{N}$ este totală. ■

Observație. Relația de ordine $\leq$ definită anterior pe $\mathbb{N}$ poartă numele de *ordinea naturală* de pe $\mathbb{N}$.

Teorema 1.4.5. Dubletul ($\mathbb{N}$, $\leq$) este o mulțime bine ordonată.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că orice submulțime nevidă A$\subseteq\mathbb{N}$ are un cel mai mic element. Pentru aceasta fie:

$$P=\{n\in\mathbb{N}: n\leq x \text{ pentru orice } x\in A\}\subseteq\mathbb{N}.$$

Evident 0$\in$P. Dacă pentru orice n$\in$P ar rezulta s(n)$\in$P, atunci am deduce că P=$\mathbb{N}$. Astfel că alegând un $x_0\in A$ atunci $x_0\in P$, deci $s(x_0)\in P$. În particular ar rezulta că $s(x_0)\leq x_0$, absurd!.

Deducem că P$\neq\mathbb{N}$, adică există a$\in$P astfel încât s(a)$\notin$P.

Vom demonstra că a$\in$A şi că a este cel mai mic element al lui A.

Dacă a$\notin$A, atunci pentru orice x$\in$A avem a<x, de unde s(a)$\leq$x (conform Lemei 1.4.2), adică s(a)$\in$P – absurd !, deci a$\in$A şi cum a$\in$P deducem că a $\leq$x pentru orice x$\in$A, adică a este cel mai mic element al lui A . ■

Corolar 1.4.6. Orice şir descrescător de numere naturale este staționar.

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir descrescător de numere naturale iar $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{N}$. Conform Teoremei 1.4.5 mulțimea A are un cel mai mic element a_k ; atunci pentru orice m$\geq$k avem $a_m \geq a_k$ şi cum $a_k \leq a_m$ deducem că $a_m = a_k$, adică şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este staționar. ■

Corolar 1.4.7. În $\mathbb{N}$ nu putem găsi un şir strict descrescător şi infinit de numere naturale.

Corolar 1.4.8. Fie P$\subseteq\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice n$\in\mathbb{N}$ (x<n $\Rightarrow$ x$\in$P) $\Rightarrow$ n$\in$P. Atunci P=$\mathbb{N}$.

Demonstrație. Fie A = $\mathbb{N}$ \ P $\subseteq\mathbb{N}$ şi să presupunem prin absurd că A $\neq\emptyset$.

Conform Teoremei 1.4.5 mulțimea A va avea un cel mai mic element a$\in$A. Cum pentru x$\in\mathbb{N}$, x<a $\Rightarrow$ x$\notin$A $\Rightarrow$ x$\in$P, conform ipotezei P=$\mathbb{N}$, adică a$\in$P şi astfel a$\notin$A – absurd !. Deci A=$\emptyset$, de unde P=$\mathbb{N}$. ■

Corolar 1.4.9. (*Teorema împărțirii cu rest în* $\mathbb{N}$). Pentru oricare două numere naturale m, n cu n$\neq$0, există şi sunt unice două numere naturale c şi r astfel încât m=n·c+r şi r < n .

Demonstrație. Fie $A=\{s\in\mathbb{N}$: există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât $m=np+s\}\subseteq\mathbb{N}$. Deoarece $m=0\cdot m+m$ deducem că $m\in A$, adică $A\neq\emptyset$. Conform Teoremei 1.4.5 mulțimea A posedă un element minimal $r\in A$. Atunci există $c\in\mathbb{N}$ astfel încât $m=c\cdot n+r$ şi să demonstrăm că $r<n$.

Dacă prin absurd $r\nless n$, atunci conform Propoziției 1.4.4, $r\geq n$, adică există $u\in\mathbb{N}$ astfel încât $r=n+u$. Deducem că $m=nc+r=nc+n+u=n(c+1)+u$, adică $u\in A$, deci $r\leq u$ şi cum $u\leq r$ deducem că $u=r$, adică $n=0$ – absurd !.

Pentru a demonstra unicitatea lui c şi r să presupunem că $m=cn+r= =c'n+r'$, cu r, $r'<n$ şi să arătăm că $c=c'$ şi $r=r'$.

Să presupunem de exemplu că $c<c'$, adică $c+u=c'$ cu $u\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $m=nc'+r'=n(c+u)+r'=nc+nu+r'$, deci $r=nu+r' >n$ – absurd !.

Deci $c=c'$ şi deducem imediat că şi $r=r'$. ∎

Observație. Numărul c poartă numele de *câtul împărțirii lui m la n* iar r se zice *restul* acestei împărțiri .

Teorema 1.4.10. Fie $m, n, m', n', p\in\mathbb{N}$ astfel încât $m \leq n$ şi $m' \leq n'$. Atunci:

(i) $m+m'\leq n+n'$ şi $mm'\leq nn'$

(ii) $mp\leq np$ şi $m^p \leq n^p$.

Demonstrație (i). Putem scrie $m+r=n$ şi $m'+r'=n'$, cu $r, r'\in\mathbb{N}$.

Din $(m+m')+(r+r')=n+n'$ deducem că $m+m'\leq n+n'$.

De asemenea $nn'=(m+r)(m'+r')=mm'+mr'+rm'+rr'$ şi cum $mr'+rm'+rr'\in\mathbb{N}$ deducem că $mm'\leq nn'$.

(ii). Se deduce ca şi (i) ținând cont de (i) precum şi de regulile de calcul din $\mathbb{N}$ stabilite mai înainte. ∎

Capitolul 2
INELUL NUMERELOR ÎNTREGI ($\mathbb{Z}$, +, ·)

2.1. Construcția grupului ($\mathbb{Z}$, +)

În vederea construirii mulțimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$, vom prezenta la început Teorema lui Malțev de scufundare a unui monoid comutativ cu proprietatea de simplificare într-un grup comutativ urmând ca prin particularizare la cazul monoidului ($\mathbb{N}$, +) să obținem grupul aditiv ($\mathbb{Z}$, +).

Teorema 2.1.1. (*Malțev*) Fie (M, ·) un monoid comutativ cu proprietatea de simplificare. Atunci există un grup comutativ G(M) şi un morfism injectiv de monoizi i_M:M→G(M) ce verifică următoarea proprietate de universalitate :

Pentru orice grup comutativ G şi orice morfism de monoizi f:M→G există un unic morfism de grupuri f′:G(M)→G astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "f"'] & G(M) \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & G \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $f'\circ i_M = f$).

Demonstrație. Pe mulțimea M′=M×M definim relația (x, y)~(x′, y′) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ xy′=yx′ şi să probăm că ~ este o echivalență pe M′ compatibilă cu structura de monoid a lui M′ (adică ~ este o congruență pe monoidul produs M′=M×M).

În mod evident, relația ~ este reflexivă şi simetrică. Dacă (x, y)~(x′, y′) şi (x′, y′)~(x′′, y′′) atunci xy′=yx′ şi x′y′′=x′′y′, de unde xx′y′y′′=x′x′′yy′, deci xy′′= yx′′ (am simplificat prin x′y′), adică (x, y)~(x′′, y′′), deci relația ~ este şi tranzitivă, de unde concluzia că ~ este o echivalență pe M′ .

Fie acum (x, y), (x′, y′), (a, b), (a′, b′)∈M′ astfel încât (x, y)~(a, b) şi (x′, y′)~(a′, b′) şi să probăm că şi (xx′, yy′)~(aa′, bb′).

Avem deci xb=ya şi x′b′=y′a′, de unde xx′bb′=yy′aa′, adică (xx′, yy′)~(aa′, bb′), adică relația ~ este o congruență pe monoidul produs M′ în care reamintim că operația de compunere se defineşte prin (x, y)·(x′, y′)=(xx′,yy′). Vom considera monoidul cât G(M)=M′/~ iar pentru (x, y)∈M′ vom nota prin [x, y] clasa sa de echivalență în G(M).

Datorită faptului că relația ~ este o congruență pe M′ deducem imediat că G(M) devine în mod canonic monoid comutativ, definind pentru [x, y], [x′, y′]∈G(M), [x, y]· [x′, y′]=[xx′, yy′] (elementul neutru al lui G(M) va fi $e_{G(M)}$=[e, e], e fiind elementul neutru al lui M).

Deoarece pentru [x, y]∈G(M), [x, y]·[y, x]=[xy, xy]=[e, e] deducem că [y, x]= =$[x, y]^{-1}$, adică G(M) este grup (comutativ). Definim i_M :M→G(M) prin i_M (x)=[x, e] pentru orice x∈M. Pentru x, y∈M avem i_M (x)·i_M (y)=[x, e]·[y, e]=[xy, e]=i_M (xy) adică i_M este morfism de monoizi. Dacă i_M (x)=i_M (y), atunci [x, e]=[y, e] ⇔ xe=ye ⇔ x=y, adică i_M este chiar morfism injectiv de monoizi .

Să arătăm acum că dubletul $(G(M), i_M)$ verifică proprietatea de universalitate din enunț. Pentru aceasta fie $(G,\circ)$ un grup comutativ oarecare şi $f:M\to G$ un morfism de monoizi. Pentru $[x, y]\in G(M)$, definim $f'([x, y])=f(x)\circ(f(y))^{-1}$. Observăm că dacă $[x, y]=[x', y']$, atunci $xy'=x'y$, deci $f(x)\circ f(y')=f(x')\circ f(y) \Leftrightarrow f(x)\circ(f(y))^{-1}=f(x')\circ(f(y'))^{-1}$, adică f' este corect definită.

Să probăm acum că f' este morfism de grupuri.

Avem $f'([x, y]\cdot[x', y'])=f'([xx', yy'])=f(xx')\circ[f(yy')]^{-1}=f(x)\circ f(x')\circ [f(y)\circ f(y')]^{-1}=$
$=(f(x)\circ[f(y)]^{-1})\circ(f(x')\circ[f(y')]^{-1})=f'([x, y])\circ f'([x', y'])$.

Pentru $x\in M$ avem $(f'\circ i_M)(x) = f'(i_M(x)) = f'([x, e]) = f(x)[f(e)]^{-1} = f(x)$, de unde concluzia că $f'\circ i_M=f$.

Pentru a proba unicitatea lui f' (cu proprietatea din enunț) să presupunem că mai există un morfism de grupuri $f'':G(M)\to G$ astfel încât $f''\circ i_M=f$.

Atunci, pentru $[x, y]\in G(M)$ avem $[x, y]=[x, e]\cdot[e, y]=[x, e]\cdot[y, e]^{-1}$, de unde $f''([x, y])=f''([x, e]\cdot[y, e]^{-1})=f''(i_M(x)\cdot(i_M(y)^{-1}))=f''(i_M(x))\circ(f''(i_M(y)))^{-1}=f(x)\circ(f(y))^{-1}=$
$=f'([x, y])$, adică $f''=f'$. ∎

Observații 1. Dacă f este un morfism injectiv de grupuri, atunci şi f' este morfism injectiv de grupuri .

Într-adevăr, dacă $[x, y]\in G(M)$ şi $f'([x, y])=e_G$, atunci $f(x)\circ(f(y))^{-1}=e_G$, deci $f(x)=f(y)$, de unde $x=y$, adică $[x, y]=[x, x]=[e, e]= e_{G(M)}$.

2. Dacă pe mulțimea dubletelor (G, f) cu G grup abelian şi $f:M\to G$ morfism injectiv de monoizi definim relația $(G, f)\le(G', f')\Leftrightarrow$există $h:G\to G'$ astfel încât h este morfism injectiv de grupuri şi $h\circ f=f'$, atunci se verifică imediat că relația de mai sus este o relație de ordine iar dubletul $(G(M), i_M)$ din Teorema lui Malțev este cel mai mic element față de această relație de ordine.

Definiția 2.1.2. Considerăm monoidul $(\mathbb{N}, +)$ (ce are proprietatea de simplificare conform Propoziției 1.2.3) şi urmând tehnica dată de Teorema lui Malțev, mulțimea subiacentă grupului aditiv $(G(\mathbb{N}), +)$ se notează prin $\mathbb{Z}$ şi poartă numele de *mulțimea numerelor întregi* .

Ținând cont de faptul că $i_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $i_{\mathbb{N}}(n)=[n, 0]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ este morfism injectiv de monoizi, vom identifica fiecare număr natural $n\in\mathbb{N}$ prin elementul întreg $[n, 0]$ astfel că $\mathbb{N}$ va fi privită în continuare ca submulțime a lui $\mathbb{Z}$.

Fie acum $z=[m, n]\in\mathbb{Z}$. Dacă $m=n$, atunci $z=0$. Dacă $m<n$, atunci există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $m+p=n$ (în acest caz convenim să notăm $p=n-m$ şi astfel $m+(n-m)=n$) iar $z=[0, p]=-[p, 0]$ se identifică cu numărul întreg $-p$ iar dacă $n<m$, atunci există $q\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n+q=m$ şi astfel $z=[q, 0]$ identificându-se cu numărul natural q.

Ținând cont de acestea putem scrie pe $\mathbb{Z}$ sub forma $\mathbb{Z}=(-\mathbb{N}^*)\cup\mathbb{N}$ unde $-\mathbb{N}^*=\{-n : n\in\mathbb{N}^*\}$sau $\mathbb{Z}=\{0 , \pm1 , \pm2 , \dots\}$. Vom nota $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2.2. Înmulțirea numerelor întregi

Lema 2.2.1. Fie $x, y, z, t, x', y', z', t'\in\mathbb{N}$ astfel încât $[x, y]=[x', y']$ şi $[z, t]=[z', t']$. Atunci $[xz+yt, xt+yz]=[x'z'+y't', x't'+y'z']$.

Demonstrație. Din ipoteză avem $x+y'=y+x'$ şi $z+t'=z'+t$ astfel că

$[xz+yt,\ xt+yz]=[x'z'+y't',\ x't'+y'z'] \Leftrightarrow (xz+yt)+(x't'+y'z')=(xt+yz)+(x'z'+y't') \Leftrightarrow$ $x(z-t)+y(t-z)=x'(z'-t')+y'(t'-z') \Leftrightarrow (x-y)(z-t)=(x'-y')(z'-t')$ ceea ce este adevărat deoarece $x-y=x'-y'$ şi $z-t=z'-t'$. ■

Fie acum $\alpha=[x, y]$ şi $\beta=[z, t]$ două numere întregi.

Definind $\alpha\cdot\beta=[xz+yt,\ xt+yz]$, conform Lemei 2.2.1 deducem că această definiție este corectă .

Propoziția 2.2.2. ($\mathbb{Z}$, +, ·) este domeniu de integritate.

Demonstrație. Conform celor de mai înainte ($\mathbb{Z}$, +) este grup comutativ. Să demonstrăm acum că ($\mathbb{Z}$, ·) este monoid comutativ iar pentru aceasta fie $\alpha=[x, y]$, $\alpha'=[x', y']$, $\alpha''=[x'', y'']$ trei elemente oarecare din $\mathbb{Z}$.

Atunci :

$\alpha(\alpha'\alpha'')=[x,y][x'x''+y'y'',x'y''+y'x'']$

$=[x(x'x''+y'y'')+y(x'y''+y'x''),\ x(x'y''+y'x'')+y(x'x''+y'y'')]$

$=[xx'x''+xy'y''+x'yy''+x''yy',\ \ xx'y''+xx''y'+x'x''y+yy'y'']$ iar

$(\alpha\alpha')\alpha''=[xx'+yy',\ \ xy'+x'y][x'', y'']$

$=[(xx'+yy')x''+(xy'+x'y)y'',\ (xx'+yy')y''+(xy'+x'y)x'']$

$=[xx'x''+xy'y''+x'yy''+x''yy',\ xx'y''+xx''y'+x'x''y+yy'y'']$,

de unde deducem că $\alpha(\alpha'\alpha'')=(\alpha\alpha')\alpha''$ adică înmulțirea numerelor întregi este asociativă.

În mod evident, $\alpha\alpha'=\alpha'\alpha$ (deoarece înmulțirea numerelor naturale este comutativă), adică înmulțirea numerelor întregi este comutativă.

Deoarece $\alpha[1,\ 0]=[x,\ y][1,\ 0]=[x,\ y]=\alpha$, deducem că elementul neutru pentru înmulțirea numerelor întregi este [1, 0].

Să arătăm acum că înmulțirea numerelor întregi este distributivă față de adunarea numerelor întregi . Într – adevăr,

$\alpha(\alpha'+\alpha'') = [x, y][x'+x'' , y'+y''] = [x (x'+x'')+y(y'+y''),\ \ x(y'+y'')+y (x'+x'')]$

$= [xx'+xx''+yy'+yy'',\ xy'+xy''+yx'+yx'']$ iar

$\alpha\alpha'+\alpha\alpha'' = [x, y][x',y']+[x, y] [x'', y''] = [xx'+yy',\ xy'+yx']+[xx''+yy'',\ xy''+yx'']$

$= [xx'+yy'+xx''+yy'',\ xy'+yx'+xy''+yx'']$ de unde se observă că

$\alpha(\alpha'+\alpha'') = \alpha\alpha'+\alpha\alpha''$.

Am probat până acum că ($\mathbb{Z}$, +, ·) este un inel comutativ unitar. Pentru a arăta că inelul $\mathbb{Z}$ nu are divizori ai lui zero, fie $\alpha\alpha'=0=[0, 0]$ cu $\alpha\neq0$. Atunci $xx'+yy'=xy'+x'y$, de unde $(x-y)(x'-y')=0$. Cum $\alpha\neq0$ (adică $x-y\neq0$) rezută că $x'-y'=0 \Leftrightarrow x'=y' \Leftrightarrow \alpha'=0$. ■

2.3. Relația de ordine naturală de pe $\mathbb{Z}$

Definiția 2.3.1. Pentru x, y$\in\mathbb{Z}$ definim relația ≤ prin $x\leq y \Leftrightarrow y-x\in\mathbb{N}$.

Teorema 2.3.2. Dubletul ($\mathbb{Z}$, ≤) este mulțime total ordonată.

Demonstrație. Fie x, y, $z\in\mathbb{Z}$; deoarece $x-x=0\in\mathbb{N}$ deducem că $x\leq x$.

Dacă $x\leq y$ şi $y\leq x$ atunci există m, $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $y-x=m$ şi $x-y=n$, de unde $m+n=0$ şi deci $m=n=0$, adică $x=y$.

Dacă $x \leq y$ şi $y \leq z$, atunci există m, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x+m=y$ şi $y+n=z$.

Cum $x+(m+n)=z$ deducem că $x \leq z$, adică $(\mathbb{Z}, \leq)$ este o mulţime ordonată. Faptul că ordonarea de pe $\mathbb{Z}$ este totală rezultă din aceea că $\mathbb{Z}=(-\mathbb{N}^*) \cup \mathbb{N}$ iar $(-\mathbb{N}^*) \cap \mathbb{N}=\emptyset$. ■

Observaţie. Din felul în care am definit relaţia de ordine $\leq$ pe $\mathbb{Z}$ deducem că $\mathbb{N}=\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$ iar $-\mathbb{N}=\{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$.

Propoziţia 2.3.3. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \leq y$.
Atunci (i) $-y \leq -x$
(ii) dacă $z \geq 0$ atunci $xz \leq yz$
(iii) dacă $z \leq 0$ atunci $xz \geq yz$.

Demonstraţie. (i). Din $x \leq y$ deducem că $y-x \in \mathbb{N}$ şi cum $(-x)-(-y)=y-x \in \mathbb{N}$ rezultă că $-y \leq -x$.

(ii). Cum $y-x \in \mathbb{N}$ şi $z \in \mathbb{N}$ avem $(y-x)z \in \mathbb{N}$ adică $yz-xz \in \mathbb{N}$, deci $xz \leq yz$.

(iii). Cum $-z \in \mathbb{N}$ şi $y-x \in \mathbb{N}$ deducem că şi $(y-x)(-z) \in \mathbb{N}$ iar cum $(y-x)(-z)=xz-yz \in \mathbb{N}$ rezultă că $xz \geq yz$. ■

Capitolul 3

CORPUL NUMERELOR RAȚIONALE $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

3.1. Construcția corpului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale

Şi în cazul construcției corpului $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale vom adopta tehnica folosită în cazul construcției inelului $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi (în sensul că vom prezenta chestiunea într-un context mai general, urmând ca printr-o particularizare la cazul domeniului de integritate $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să obținem corpul $\mathbb{Q}$).

Fie $(A, +, \cdot)$ un domeniu de integritate (adică un inel unitar şi comutativ fără divizori ai lui zero) .

Definiția 3.1.1. Numim *sistem multiplicativ* în A, orice submulțime $S\subseteq A$ astfel încât $0\notin S$, $1\in S$, iar dacă $x, y\in S$ atunci şi $x\cdot y\in S$.

Exemple 1. $S=A^*=A\setminus\{0\}$ este un sistem multiplicativ al lui A.

2. Dacă $\wp\subset A$ este un ideal prim, atunci $S_\wp=A\setminus\wp$ este de asemenea un sistem multiplicativ al lui A.

3. Dacă $a\in A$, $a\neq 0, 1$, atunci $S_a=\{a^k : k\in\mathbb{Z}\}$ este un sistem multiplicativ al lui A.

Pentru un sistem multiplicativ $S\subseteq A$ să considerăm mulțimea $A\times S=\{(a, s) : a\in A, s\in S\}$ iar pe aceasta relația binară definită prin $(a,s)\sim(a',s') \Leftrightarrow as'=a's$. Ca şi în cazul Teoremei lui Malțev se demonstrează facil că $\sim$ este o echivalență pe $A\times S$.

Să notăm $A[S^{-1}]= A\times S /\sim$ iar pentru $(a, s)\in A\times S$ vom nota prin $\frac{a}{s}$ clasa sa de echivalență în $A[S^{-1}]$.

Lema 3.1.2. Fie $a, b, a', b'\in A$ şi $s, t, s', t'\in S$ astfel încât $\frac{a}{s}=\frac{b}{t}$ şi $\frac{a'}{s'}=\frac{b'}{t'}$.

Atunci $\frac{as'+sa'}{ss'}=\frac{bt'+b't}{tt'}$ şi $\frac{aa'}{ss'}=\frac{bb'}{tt'}$.

Demonstrație. Avem că $at=bs$ şi $a't'=b's'$ astfel că $\frac{as'+sa'}{ss'}=\frac{bt'+b't}{tt'} \Leftrightarrow$ $(as'+sa')tt'=(bt'+b't)ss' \Leftrightarrow as'tt'+sa'tt'=bt'ss'+b'tss' \Leftrightarrow ats't'-bss't'=tsb's'-tsa't' \Leftrightarrow$ $(at-bs)s't' = (b's'-a't')ts$, ceea ce este adevărat (căci $at-bs=b's'-a't'=0$). Înmulțind membru cu membru egalitățile $at=bs$ şi $a't'=b's'$ obținem că $ata't'=bsb's' \Leftrightarrow \frac{aa'}{ss'}=\frac{bb'}{tt'}$. ■

Ca un corolar al Lemei 3.1.2 deducem că dacă pentru $\frac{a}{s},\frac{b}{t}\in A[S^{-1}]$ definim $\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+bs}{st}$ şi $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$, atunci cele două operații sunt corect definite .

Propoziția 3.1.3. ($A[S^{-1}]$, +, ·) este inel comutativ unitar în care $\{\frac{a}{s}$:a, s∈S$\}\subseteq U(A[S^{-1}])$ iar $i_S:A\to A[S^{-1}]$, $i_S(a)=\frac{a}{1}$ pentru orice a∈A este un morfism injectiv de inele ce verifică următoarea proprietate de universalitate :

Pentru orice inel comutativ unitar B şi orice morfism de inele f:A→B astfel încât f(S)⊆U(B), există un unic morfism de inele $f':A[S^{-1}]\to B$ astfel încât $f'\circ i_S = f$, (unde prin U(B) am notat mulțimea elementelor inversabile ale lui B) .

Demonstrație. Deoarece sunt simple calcule într-un inel comutativ, lăsăm pe seama cititorului verificarea faptului că ($A[S^{-1}]$, +, ·) este inel comutativ unitar .

Dacă s∈S, atunci elementul neutru al lui $A[S^{-1}]$ față de operația de înmulțire este $1=\frac{s}{s}=\frac{1}{1}$ astfel că dacă a, s∈S, atunci $\frac{a}{s}\in U(A[S^{-1}])$ iar $\left(\frac{a}{s}\right)^{-1}=\frac{s}{a}$ (deoarece $\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{a}=\frac{as}{as}=\frac{1}{1}=1$). Fie acum B un inel comutativ unitar şi f:A→B un morfism de inele pentru care f(S)⊆U(B). Pentru $\frac{a}{s}\in A[S^{-1}]$, cu a∈A şi s∈S, scriind $\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{a}{1}\cdot\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}=i_S(a)\cdot(i_S(s))^{-1}$, definind $f'\left(\frac{a}{s}\right)=f(a)\cdot(f(s))^{-1}$, se verifică imediat că f′ are proprietățile din enunț . ■

Observație. Din Propoziția 3.1.3 deducem că dacă A este un domeniu de integritate şi S=A*=A\{0}, atunci $A[S^{-1}]$ este un corp comutativ, numit *corpul total de fracții al lui A* .

Definiția 3.1.4. Corpul total de fracții al inelului (ℤ, +, ·) se notează prin ℚ şi poartă numele de *corpul numerelor raționale* . Elementele lui ℚ se mai numesc şi *fracții.* Dacă $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ atunci p se numeşte *numărătorul* fracției x iar q *numitorul* său.

Deoarece $i_{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $i_{\mathbb{Z}}(a)=\frac{a}{1}$, pentru orice a∈ℤ este în particular funcție injectivă, putem să îl privim pe ℤ ca o submulțime a lui ℚ, adică ℤ⊆ℚ. Prin urmare, ℕ⊆ℤ⊆ℚ .

3.2. Relația de ordine naturală de pe ℚ

Fie x∈ℚ, adică $x=\frac{p}{q}$ cu p∈ℤ iar q∈ℤ*. Dacă q<0, atunci –q>0 şi cum $x=\frac{p}{q}=\frac{-p}{-q}$ putem presupune că orice număr x∈ℚ se scrie sub forma $x=\frac{p}{q}$, cu q>0 (adică q∈ℕ*).

Definiția 3.2.1. Fie x, y∈ℚ, $x=\frac{p}{q}$, $y=\frac{r}{s}$ cu q, s∈ℕ*. Vom defini pe ℚ relația $x\le y \Leftrightarrow ps-qr\le 0$.

Propoziția 3.2.2. (ℚ, ≤) este o mulțime total ordonată .

Demonstrație. Reflexivitatea este imediată. Pentru antisimetrie, să presupunem că x≤y şi y≤x. Atunci ps-qr ≤0 şi qr-ps ≤0, de unde ps-qr=0, adică ps=qr deci x=y.

Pentru tranzitivitate, să mai alegem z=$\frac{t}{u}$ cu u∈$\mathbb{N}$* astfel încât x≤y şi y≤z, adică ps-qr ≤0 şi ur-st ≤0. Cum q, s, u∈$\mathbb{N}$* deducem că (ps-qr)u≤0 şi (ur-st)q≤0, adică pus-qru≤0 şi qru-stq ≤0, de unde pus-stq ≤0⇔s(pu-tq)≤0, adică pu - tq ≤0, deci x≤z . ■

Faptul că ordinea ≤ de pe $\mathbb{Q}$ este totală rezultă din aceea că ordinea naturală ≤ de pe $\mathbb{Z}$ este totală .

Observaţie. Relaţia de ordine ≤ de pe $\mathbb{Q}$ definită mai înainte poartă numele de *ordinea naturală de pe* $\mathbb{Q}$.

În continuare vom nota $\mathbb{Q}_+$ ={x∈$\mathbb{Q}$: x≥0} iar prin $\mathbb{Q}_+$*={x∈$\mathbb{Q}$: x>0}.

Capitolul 4

CORPUL NUMERELOR REALE ($\mathbb{R}$, +,·)

4.1. Inele ordonate

Relațiile de ordine de pe inelul $\mathbb{Z}$ şi corpul $\mathbb{Q}$ se înscriu într-un context mai general pe care îl vom prezenta în cele ce urmează şi care ne va fi de folos şi pentru ordinea naturală de pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

Definiția 4.1.1. Dacă A este un domeniu de integritate (adică un inel comutativ unitar fără divizori ai lui zero), prin *ordonare* pe A înțelegem o submulțime nevidă $P\subseteq A$ astfel încât :

Ord 1: Pentru orice $x\in A$ avem în mod exclusiv $x\in P$ sau $x=0$ sau $-x\in P$.

Ord 2: Dacă $x, y\in P$ atunci $x+y, xy\in P$.

În acest caz vom spune că inelul A este *ordonat de P* iar *P este mulțimea elementelor pozitive ale lui A.*

Să presupunem acum că A este ordonat de P. Cum $1\neq 0$ şi $1=1^2=(-1)^2$ deducem că $1\in P$ (adică 1 este pozitiv).

Ținând cont de **Ord 2** deducem inductiv că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\underbrace{1+1+...+1}_{de\ n\ ori}$ este pozitiv.

Un element $x\in A$, $x\neq 0$, $x\notin P$ (adică $-x\in P$) se zice *negativ* . Dacă $x, y\in A$ sunt negative, atunci xy este pozitiv (căci $-x$, $-y\in P$ iar $(-x)(-y) =xy \in P$).

Analog deducem că dacă x este negativ iar y este pozitiv, atunci xy este negativ şi că pentru orice $x\neq 0$ din A, x^2 este pozitiv.

Dacă A este corp, cum pentru $x\neq 0$ pozitiv avem $xx^{-1}=1$ deducem că şi x^{-1} este pozitiv**.**

Fie acum $A'\subseteq A$ un subinel iar $P'=P\cap A'$. Se verifică imediat că A' este ordonat de P' (P'se va numi *ordonarea indusă* de P pe A') .

Mai general, fie A', A două inele ordonate iar P', P respectiv mulțimile elementelor pozitive din A' şi A .

Dacă $f:A'\to A$ este un morfism injectiv de inele, vom spune că f *păstrează ordinea* dacă pentru orice $x\in P'$ deducem că $f(x)\in P$ (echivalent cu a zice că $P'\subseteq f^{-1}(P)$).

Fie acum $x, y\in A$. Definim $x<y$ (sau $y >x$) prin $y-x \in P$.

Astfel $x >0$ înseamnă $x\in P$ iar $x<0$ înseamnă că $-x\in P$ (spunem atunci că x este *negativ*).

Se verifică imediat că dacă $x, y, z\in A$, atunci :

IN_1: Dacă $x<y$ şi $y<z$, atunci $x<z$.

IN_2: Dacă $x<y$ şi $z >0$, atunci $xz<yz$.

IN_3: Dacă $x<y$ atunci $x+z<y+z$.

IN_4: Dacă A este corp, $x >0$, $y >0$ şi $x<y$ atunci $y^{-1} < x^{-1}$.

Dacă $x, y\in A$ definim $x\leq y$ prin $x<y$ sau $x=y$. Fie acum A un domeniu de integritate ordonat de P iar K corpul său total de fracții.

Dacă $P_K=\{ \frac{a}{b} \in K \mid a, b>0 \}$, atunci P_K defineşte o ordonare pe K.

Într-adevăr, dacă $x\in K$, $x\neq 0$, $x=\frac{a}{b}$ atunci putem presupune că $b>0$ (deoarece $x=\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$). Dacă $a>0$, atunci $x\in P_K$. Dacă $-a>0$ atunci $-x=\frac{-a}{b}\in P_K$.

Nu putem avea simultan $x,-x\in P_K$ căci scriind $x=\frac{a}{b}$ şi $-x=\frac{c}{d}$, cu $a, b, c, d\in A$ şi a, b, c, d >0, atunci $-\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ deci $-(ad)=bc$, absurd (căci $bc\in P$ şi $ad\in P$). Deci P_K satisface **Ord 1.**

Cum $xy=\frac{ac}{bd}$ (iar ac, bd >0) şi $x+y=\frac{ad+bc}{bd}$ (iar ad+bc, bd>0) deducem că P_K satisface şi **Ord 2** .

Observaţie. Aplicând cele de mai sus lui $\mathbb{Q}$ (care este corpul total de fracţii al domeniului de integritate $\mathbb{Z}$) obţinem de fapt ceea ce am stabilit în legătură cu ordonarea naturală de pe $\mathbb{Q}$ de la Capitolul 3 (evident $\mathbb{N}^*$ este o ordonare pe $\mathbb{Z}$).

Fie acum A un inel ordonat. Pentru $x\in A$ definim :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x\geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$$

(|x| poartă numele de *valoarea absolută* sau *modulul* lui x).

Lema 4.1.2. Pentru orice $x \in A$, $|x|$ este unicul element $z\in A$ astfel încât $z\geq 0$ şi $z^2=x^2$.

Demonstraţie. Să observăm că $|x|^2=x^2$ şi $|x|\geq 0$ pentru orice $x\in A$. Pe de altă parte, dacă $a\in A$ şi $a>0$ atunci există cel mult două elemente $z\in A$ astfel încât $z^2=a$ (căci polinomul $X^2-a\in A[X]$ are cel mult două rădăcini). Dacă $w^2=a$, atunci $w\neq 0$ şi $(-w)^2=w^2=a$, deci există cel mult un $z\in A$ pozitiv astfel încât $z^2=a$ şi cu aceasta lema este probată . ■

Definiţia 4.1.3. Pentru $a\geq 0$, definim elementul $\sqrt{a}$ ca fiind acel element $z\geq 0$ astfel încât $z^2=a$ (evident, dacă un astfel de z există !).

Se verifică acum uşor că dacă pentru $a, b\geq 0$, $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ există, atunci $\sqrt{ab}$ există şi $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Evident, pentru orice $x\in A$, $|x|=\sqrt{x^2}$.

Lema 4.1.4. Dacă A este un inel ordonat, atunci

VA_1: Pentru orice $x\in A$, $|x|\geq 0$, iar $|x|>0$ dacă $x\neq 0$

VA_2 : Pentru orice $x, y\in A$, $|xy|=|x|\cdot|y|$

VA_3 : Pentru orice $x, y \in A$, $|x+y|\leq|x|+|y|$.

Demonstraţie. Cum VA_1 şi VA_2 sunt imediate, să probăm pe VA_3 :
$|x+y|^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\leq|x|^2+2|xy|+|y|^2=|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$, de unde $|x+y|\leq|x|+|y|$. ■

Fie acum K un corp comutativ ordonat pentru care există un morfism (injectiv) de corpuri $f:\mathbb{Q}\to K$ (deci K va fi de caracteristică 0).

Se arată imediat că dacă $x\in\mathbb{Z}$, atunci

$$f(x) = \begin{cases} \underbrace{1_K+\ldots+1_K}_{de\ x\ ori}, & \text{dacă } x\geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \\ \underbrace{(-1_K)+\ldots+(-1_K)}_{de\ -x\ ori}, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$$

Mai mult, dacă $x\in\mathbb{Z}^*$, cum în $\mathbb{Q}$ avem $x\cdot\frac{1}{x}=1$ deducem că $1_K=f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, de unde $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)^{-1}$ în K. Atunci dacă $x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ avem $f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=m\cdot(n\cdot 1_K)^{-1}$. Rezultă că f este unic determinat ; vom identifica atunci pe $\mathbb{Q}$ cu un subcorp al lui K (f se va numi scufundarea canonică a lui $\mathbb{Q}$ în K).

Dacă $x=\frac{m}{n}$, $y=\frac{m'}{n'}\in\mathbb{Q}$ (cu $n, n'>0$) şi $x\leq y$, atunci $mn'-m'n\leq 0$, deci $m'n-mn'\geq 0$, iar $f(x)=m(n1_K)^{-1}$, $f(y)=m'(n'1_K)^{-1}$. Din $m'n-mn'\geq 0$ şi $1_K\geq 0$ deducem că $(m'n-mn')1_K\geq 0 \Leftrightarrow m'(n1_K)-m(n'1_K)\geq 0 \Leftrightarrow m'(n1_K)\geq m(n'1_K)$, de unde $m'(n'1_K)^{-1}\geq m(n\,1_K)^{-1} \Leftrightarrow f(y)\geq f(x)$.

Obţinem astfel următorul rezultat :

Teorema 4.1.5. Dacă K este un corp ordonat de caracteristică 0, atunci scufundarea canonică a lui $\mathbb{Q}$ în K, $f:\mathbb{Q}\to K$, $f\left(\frac{m}{n}\right)=m\cdot(n\cdot 1_K)^{-1}$, (cu n > 0) păstrează ordinea.

În continuare prin K vom desemna un corp comutativ ordonat de caracteristică 0 iar un element $x\in\mathbb{Z}$ îl vom identifica cu $f(x) = x\cdot 1_K$.

Definiţia 4.1.6. Un şir de elemente $(x_n)_{n\geq 0}$ din K se zice şir *Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon\in K$, $\varepsilon>0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n\in\mathbb{N}$, $m, n\geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

Vom spune despre şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ că este *convergent* la un element $x\in K$, dacă pentru orice $\varepsilon\in K$, $\varepsilon>0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n\geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n-x|<\varepsilon$.

Observaţii. 1. Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la două elemente x, $y\in K$. Atunci pentru $\varepsilon\in K$, $\varepsilon>0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ suficient de mare avem :

$$|x-y|\leq|x-x_n+x_n-y|\leq|x-x_n|+|x_n-y|\leq 2\varepsilon$$

iar cum ε este oarecare deducem că $|x-y|=0$ (căci dacă $|x-y|\neq 0$, atunci $|x-y|>0$ şi am avea pentru $\varepsilon=|x-y|$, $|x-y|<|x-y|$, absurd !).

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la un element $x\in K$, vom scrie $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. Orice şir convergent este şir Cauchy.

Definiţia 4.1.7. Corpul ordonat K în care orice şir Cauchy este convergent se zice *complet* .

Definiţia 4.1.8. Corpul ordonat K se numeşte *arhimedean* dacă pentru orice $x\in K$, există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $x \le n\cdot 1_K$.

Teorema 4.1.9. Corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale nu este complet .

Demonstraţie. Într-adevăr, să considerăm şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ de numere raţionale dat prin $x_0=1$ şi $x_{n+1}=\dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$ pentru orice $n\ge 0$. Prin inducţie matematică relativă la n se probează că $x_n^2<2$, şi că $(x_n)_{n\ge 0}$ este crescător (căci $x_{n+1}-x_n=\dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}-x_n=\dfrac{2\left(2-x_n^{\ 2}\right)}{3+2x_n}>0$) iar de aici că el este şir Cauchy.

Dacă acest şir ar avea limita $l\in\mathbb{Q}$, atunci cu necesitate $l=\dfrac{4+3l}{3+2l}$, de unde $l^2=2$, absurd căci $l\notin\mathbb{Q}$. Deci $(x_n)_{n\ge 0}$ nu are limită în $\mathbb{Q}$, adică corpul $\mathbb{Q}$ nu este complet. ■

Pentru K corp ordonat şi $S\subseteq K$, prin *majorant* al lui S în K înţelegem un element $z\in K$ astfel încât $x\le z$, pentru orice $x\in S$.

Prin marginea superioară a lui S, notată prin sup(S) înţelegem cel mai mic majorant al lui S din K (evident, dacă acesta există).

Teorema 4.1.10. Fie K un corp arhimedean complet. Atunci orice submulţime nevidă S a lui K ce admite un majorant are margine superioară.

Demonstraţie. Pentru $n\in\mathbb{N}$, fie $T_n=\{y\in\mathbb{Z} : nx \le y \text{ pentru orice } x\in S \}$.

Atunci T_n este mărginită de orice element de forma nx cu $x\in S$ şi este nevidă deoarece dacă b este un majorant al lui S, atunci orice întreg y astfel încât $nb\le y$ este în T_n (deoarece K este arhimedean) .

Fie y_n cel mai mic element al lui T_n . Atunci există $x_n\in S$ astfel încât $y_n-1<nx_n\le y_n$, de unde $\dfrac{y_n}{n}-\dfrac{1}{n}<x_n\le\dfrac{y_n}{n}$.

Să notăm $z_n=\dfrac{y_n}{n}$ şi să demonstrăm că şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy.

Pentru aceasta fie $m, n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{y_n}{n}\le\dfrac{y_m}{m}$ atunci $\dfrac{y_m}{m}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{y_n}{n}\le\dfrac{y_m}{m}$ căci în caz contrar, $\dfrac{y_n}{n}\le\dfrac{y_m}{m}-\dfrac{1}{n}$, deci $\dfrac{y_m}{m}-\dfrac{1}{n}$ este majorant pentru S, ceea ce este absurd căci x_n este mai mare.

Atunci $\left|\dfrac{y_n}{n}-\dfrac{y_m}{m}\right|\le\dfrac{1}{n}$ de unde deducem că $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy.

Fie $w=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ şi să demonstrăm la început că w este un majorant pentru S.

Să presupunem prin absurd că există $x\in S$ astfel încât $w<x$. Există atunci $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $|z_n-w|\le\dfrac{x-w}{2}$ astfel că $x-z_n=x-w+w-z_n\ge x-w-|w-z_n|\ge x-w-\dfrac{x-w}{2}\ge\dfrac{x-w}{2}>0$ deci $x>z_n$ contrazicând faptul că z_n este majorant al lui S.

Să demonstrăm acum că w = sup S.

Fie u<w; atunci există $n\in\mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât $|z_n - x_n| \le \frac{1}{4} < \frac{w-u}{4}$.

Putem alege n suficient de mare astfel încât $|z_n - w| \le \frac{w-u}{4}$ căci $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.

Astfel, $x_n - u = w - u + x_n - z_n + z_n - w \ge w - u - |x_n - z_n| - |z_n - w| \ge w - u - \frac{w-u}{4} - \frac{w-u}{4} \ge \frac{w-u}{4} > 0$, deci $u < x_n$ (adică u nu este majorant, absurd !). ■

4.2. Construcția corpului $(\mathbb{R},+,\cdot)$ al numerelor reale

Vom prezenta construcția corpului numerelor reale cu ajutorul şirurilor Cauchy de numere raționale (definite mai înainte într-un context mai general).

Definiția 4.2.1. Un şir de numere raționale $\gamma=(c_n)_{n\ge0}$ se zice şir *nul* dacă pentru orice $\varepsilon\in\mathbb{Q}$, $\varepsilon>0$, există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n\ge n_0$, $|c_n|\le\varepsilon$.

Dacă $\alpha=(a_n)_{n\ge0}$ şi $\beta=(b_n)_{n\ge0}$ sunt două şiruri de numere raționale, definim suma şi produsul lor prin $\alpha+\beta=(a_n+b_n)_{n\ge0}$ şi respectiv $\alpha\beta=(a_nb_n)_{n\ge0}$

Lema 4.2.2. Orice şir Cauchy $\alpha=(a_n)_{n\ge0}$ de numere raționale este mărginit.

Demonstrație. Există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \ge k$, $|a_n - a_k| \le 1$, de unde $|a_n| \le |a_k|+1$. Alegând $M = \max(|a_0|, \ldots, |a_{k-1}|, |a_k|+1)$ deducem că $|a_n| \le M$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. ■

În cele ce urmează prin **C($\mathbb{Q}$)** vom nota mulțimea şirurilor Cauchy de numere raționale.

Propoziția 4.2.3. (C($\mathbb{Q}$), +, ·) este inel unitar comutativ.

Demonstrație. Fie $\alpha=(x_n)_{n\ge0}$, $\beta=(y_n)_{n\ge0}$, **0**=(0, 0, …) şi **1**=(1, 1, …). Să demonstrăm la început că $\alpha+\beta$ şi $\alpha\beta$ sunt din **C($\mathbb{Q}$).**

Pentru $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$, există n_ε', $n_\varepsilon''\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice m, $n \ge n_\varepsilon'$ să avem $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi pentru orice m, $n \ge n_\varepsilon''$, $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alegând $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$, deducem că pentru orice m, $n \ge n_\varepsilon$, $|x_m - x_n|, |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, astfel că $|(x_m+y_m) - (x_n+y_n)| = |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \le |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\alpha+\beta \in$ **C($\mathbb{Q}$).**

Pentru cazul produsului $\alpha\beta$ vom ține cont de Lema 4.2.2. Conform acesteia, există $M_1, M_2\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $|x_n| \le M_1$ şi $|y_n| \le M_2$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Notând $M=\max(M_1, M_2)$ şi alegând $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$, există n_ε', $n_\varepsilon''\in\mathbb{N}$ astfel încât

$|x_m - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2M}$, pentru m, $n \ge n_\varepsilon'$ şi

$|y_m - y_n| \le \frac{\varepsilon}{2M}$, pentru m, $n \ge n_\varepsilon''$.

Astfel, pentru m, $n \ge n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$, avem $|x_my_m - x_ny_n| = |x_m(y_m - y_n) + y_n(x_m - x_n)| = |x_m||y_m - y_n| + |y_n||x_m - x_n| \le M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$, adică şi $\alpha\beta\in$ **C($\mathbb{Q}$).**

În mod evident, $-\alpha=(-x_n)_{n\ge0} \in$ **C($\mathbb{Q}$)** ca şi **0**, **1**$\in$**C($\mathbb{Q}$).**

Deducem acum imediat că (**C($\mathbb{Q}$),** +, ·) este inel comutativ şi unitar. ■

În continuare, vom nota prin

$$\mathbf{N}(\mathbb{Q})=\{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{C}(\mathbb{Q}) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} .$$

(convenim să numim elementele lui **N**($\mathbb{Q}$) *şiruri nule*).

Lema 4.2.4 N($\mathbb{Q}$) este ideal al inelului C($\mathbb{Q}$).

Demonstraţie. Ca şi în cazul sumei din propoziţia precedentă, se demonstrează imediat că dacă α, $\beta\in$**N**($\mathbb{Q}$)**,** atunci α-$\beta\in$**N**($\mathbb{Q}$)**.**

Fie acum $\alpha=(a_n)_{n\geq 0} \in$**C**($\mathbb{Q}$) şi $\beta=(b_n)_{n\geq 0} \in$**N**($\mathbb{Q}$)**.** Conform Lemei 4.2.2 există $M\in Q_+^*$ astfel încât $| a_n | \leq M$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Deoarece $\beta=(b_n)_{n\geq 0} \in$**N**($\mathbb{Q}$) pentru $\varepsilon\in Q_+^*$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $| b_n | \leq \frac{\varepsilon}{M}$.

Atunci pentru $n \geq n_\varepsilon$, $| a_n b_n | = | a_n | | b_n | \leq M\cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, astfel că $\alpha\beta\in$**N**($\mathbb{Q}$), adică **N**($\mathbb{Q}$) este ideal al inelului comutativ **C**($\mathbb{Q}$) . ■

Lema 4.2.5. Fie $\alpha\in$C($\mathbb{Q}$) astfel încât $\alpha\notin$N($\mathbb{Q}$), $\alpha=(a_n)_{n\geq 0}$. Atunci există $c\in\mathbb{Q}_+^*$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, $| a_n | \geq c$.

Demonstraţie. Dacă prin absurd lema nu ar fi adevărată, atunci pentru $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$ există o infinitate de numere naturale $n_1<n_2<\ldots$ astfel încât $| a_{n_i} |< \frac{\varepsilon}{3}$ pentru orice $i \geq 1$.

Cum $\alpha\in$**C**($\mathbb{Q}$), există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice m, $n\geq p$ să avem $|a_n - a_m|\leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Fie $n_i \geq p$; atunci pentru orice $m \geq p$, $| a_m | \leq | a_m - a_{n_i} |+| a_{n_i} | \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ şi pentru orice m, $n\geq p$,

$| a_n | \leq | a_n - a_m |+| a_m | \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3} =\varepsilon$, adică $\alpha\in$**N**($\mathbb{Q}$)**,** absurd!. ■

Teorema 4.2.6. (C($\mathbb{Q}$)/N($\mathbb{Q}$) , +, ·) este corp comutativ.

Demonstraţie. Faptul că **C**($\mathbb{Q}$)**/N**($\mathbb{Q}$) este inel comutativ rezultă din aceea că **C**($\mathbb{Q}$) este inel comutativ iar **N**($\mathbb{Q}$) este ideal în **C**($\mathbb{Q}$)**.**

Fie acum $\alpha\in$**C**($\mathbb{Q}$) astfel încât $\alpha\notin$**N**($\mathbb{Q}$) şi $\overline{\alpha}=\alpha$ +**N**($\mathbb{Q}$)$\in$**C**($\mathbb{Q}$) / **N**($\mathbb{Q}$). Vom demonstra că există $\overline{\beta} \in$**C**($\mathbb{Q}$)**/N**($\mathbb{Q}$) astfel încât $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\overline{1}$, unde $\overline{1}$=**1**+**N**($\mathbb{Q}$) (reamintim că **1**=(1, 1, . . .)$\in$**C**($\mathbb{Q}$)).

Cum $\alpha\notin$**N**($\mathbb{Q}$)**,** conform Lemei 4.2.5 există $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, $| a_n | \geq \varepsilon$. În particular, deducem că pentru $n \geq n_0$, $a_n\neq 0$.

Fie $\beta=(b_n)_{n\geq 0}$ cu

$$b_n = \begin{cases} 1, & pentru\ \ 0\leq n\leq n_0 \\ a_n^{-1}, & pentru\ \ n\geq n_0 \end{cases}$$

Să arătăm că $\beta\in$**C**($\mathbb{Q}$) şi că $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=\overline{1}$.

Putem alege deci $c\in\mathbb{Q}_+^*$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, $| a_n | \geq c>0$; de unde va rezulta că $\frac{1}{|a_n|}\leq\frac{1}{c}$.

Pentru $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ există $p \geq n_0$ astfel încât pentru orice m, n $\geq$ p să avem

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon c^2 .$$

Atunci pentru orice m, n $\geq$ p avem $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| = \left|\frac{a_m - a_n}{a_m \cdot a_n}\right| \leq \frac{\varepsilon \cdot c^2}{c^2} = \varepsilon$, adică $\beta \in \mathbf{C}(\mathbb{Q})$.

Cum $\alpha\beta$ diferă de **1** numai într-un număr finit de termeni (eventual pentru $n \leq n_0$) deducem că $\alpha\beta$-**1**$\in$**N**($\mathbb{Q}$), adică $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{1}$, deci $\overline{\beta} = (\overline{\alpha})^{-1}$, adică **C**($\mathbb{Q}$) / **N**($\mathbb{Q}$) este corp . ■

Definiția 4.2.7. Mulțimea C($\mathbb{Q}$)/N($\mathbb{Q}$) se notează prin $\mathbb{R}$ şi poartă numele de *mulțimea numerelor reale.*

Corpul ($\mathbb{R}$,+, ·) poartă numele de *corpul numerelor reale.*

Observație. Deoarece se probează imediat că funcția $i_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, $i_{\mathbb{Q}}(a) = \overline{(a, a, ...)}$ pentru orice a $\in\mathbb{Q}$ este morfism de corpuri (deci în particular funcție injectivă) putem privi pe $\mathbb{Q}$ ca subcorp al lui $\mathbb{R}$.

Elementele din **I**=$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ se zic *numere iraționale.*

Lema 4.2.8. Pentru $\alpha=(a_n)_{n\geq 0} \in$C($\mathbb{Q}$) este verificată doar una din condițiile :

(i) $\alpha\in$N($\mathbb{Q}$);

(ii) Există $c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât pentru n suficient de mare să avem $a_n \geq c$;

(iii) Există $c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât pentru n suficient de mare să avem $a_n \leq -c$.

Demonstrație. Evident (ii) şi (iii) se exclud reciproc.

Să presupunem acum că $\alpha\notin$**N**($\mathbb{Q}$). Conform Lemei 4.2.5 există $n_0\in\mathbb{N}$ şi $c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, $|a_n| \geq c$ astfel că $a_n \geq c$ dacă $a_n > 0$ şi $a_n \leq -c$ dacă $a_n<0$.

Să presupunem acum că $a_n>0$ pentru suficient de mulți n şi $a_m<0$ pentru suficient de mulți m. Pentru astfel de n şi m avem $a_n-a_m\geq 2c>0$ ceea ce contrazice faptul că $\alpha\in$**C**($\mathbb{Q}$).

Deci (ii) sau (iii) în sens disjunctiv trebuie să aibă loc . ■

4.3. Ordonarea lui $\mathbb{R}$

Fie P={ $\overline{\alpha}$: $\alpha\in$**C**($\mathbb{Q}$) şi verifică (ii) din Lema 4.2.8}$\subseteq\mathbb{R}$

Lema 4.3.1. P este o ordonare pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Conform Lemei 4.2.8 deducem că P satisface **Ord 1**.

Fie acum $\alpha = (a_n)_{n\geq 0}$ şi $\beta = (b_n)_{n\geq 0}$ $\in$**C**($\mathbb{Q}$) astfel încât $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in$P.

Există $c_1, c_2\in\mathbb{Q}_+^*$ şi $n_1, n_2\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru $n\geq n_1$, $a_n\geq c_1$ şi pentru $n\geq n_2$, $b_n\geq c_2$.

Pentru $n \geq \max(n_1, n_2)$, $a_n+b_n \geq c_1+c_2 >0$ şi $a_nb_n \geq c_1c_2 >0$ astfel că $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ verifică (ii) din Lema 4.2.8 , adică $\overline{\alpha} + \overline{\beta}, \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \in$P, deci P satisface şi **Ord 2**.

Observații. 1. Din cele de mai sus deducem că dacă $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in\mathbb{R}$, $\alpha=(x_n)_{n\geq 0}$, $\beta=(y_n)_{n\geq 0}$, atunci $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ este echivalent cu aceea că $\overline{\beta}$ - $\overline{\alpha}$ $\in$P, adică $\overline{(\beta-\alpha)}\in$P, deci cu existența lui $n_0\in\mathbb{N}$ şi $c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $y_n-x_n \geq c$ pentru orice $n \geq n_0$.

Convenim să numim ordinea de mai înainte *ordonarea naturală* de pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru $a \in \mathbb{Q}$ convenim să notăm pe $i_{\mathbb{Q}}(a)$ prin $\overline{a}$, adică $\overline{a} = \overline{(a, a, ...)}$.

Teorema 4.3.2. Ordonarea naturală de pe $\mathbb{R}$ (dată de P) este arhimedeeană.

Demonstrație. Conform Definiției 4.1.8, pentru $\alpha=(a_n)_{n\geq 0} \in$ **C($\mathbb{Q}$)** va trebui să demonstrăm că există $m_\alpha \in \mathbb{N}$ astfel încât $\overline{\alpha} \leq \overline{m_\alpha}$.

Conform Lemei 4.2.2 există $M \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $a_n \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Alegând $m_\alpha \in \mathbb{N}$ astfel încât $M \leq m_\alpha$ deducem că $a_n \leq m_\alpha$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică $\overline{\alpha} \leq \overline{m_\alpha}$. ■

Următorul rezultat este imediat:

Lema 4.3.3. Dacă $\alpha=(a_n)_{n\geq 0} \in C(\mathbb{Q})$ şi există $c \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$, $|a_n| \leq c$, atunci $|\overline{\alpha}| \leq \overline{c}$.

Observație. Conform Teoremei 4.3.2, fiind dat $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, există $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\varepsilon<\varepsilon_1$ astfel că în definiția limitei unui şir din $\mathbb{R}$ nu contează dacă ε este real sau rațional.

Lema 4.3.4. Fie $\alpha = (a_n)_{n\geq 0} \in C(\mathbb{Q})$. Atunci $\overline{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n}$ (adică orice şir Cauchy de numere raționale converge în $\mathbb{R}$).

Demonstrație. Fie $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \geq n_0$, $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Atunci pentru $m \geq n_0$ avem $|\ \overline{\alpha} - \overline{a_m}\ | = \left|\overline{\alpha - a_m}\right| \leq \overline{\varepsilon}$ (căci $\alpha - a_m = (a_n - a_m)_{n\geq 0}$), adică $\overline{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n}$. ■

Teorema 4. 3.5. Corpul $\mathbb{R}$ este complet .

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy de numere reale.

Conform Lemei 4.3.4, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ găsim $a_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât $|\ x_n - \overline{a_n}\ | < \frac{1}{n}$

(în partea dreaptă este vorba de fapt de $(\ \overline{n}\ )^{-1}$!)

Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este Cauchy, deducem că fiind dat $\varepsilon>0$ (de exemplu $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \geq n_0$ să avem $|\ x_n - x_m\ | \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Fie $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ astfel încât $\frac{1}{n_1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Atunci pentru orice $m, n \geq n_1$ avem

$$\left|\overline{a_n} - \overline{a_m}\right| = \left|\overline{a_n} - x_n + x_n - x_m + x_m - \overline{a_m}\right| \leq \left|\overline{a_n} - x_n\right| + \left|x_n - x_m\right| + \left|x_m - \overline{a_n}\right| \leq \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Adică $\left(\overline{a_n}\right)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy de numere raționale. Conform Lemei 4.3.4 există $x = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n}$ în $\mathbb{R}$. Deoarece pentru n suficient de mare $|\ x_n - x\ | \leq \leq |\ x_n - \overline{a_n}\ | + |\ \overline{a_n} - x\ |$ deducem că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, adică $\mathbb{R}$ este complet. ■

Definiția 4.3.6. Un corp ordonat K se zice *complet ordonat* dacă orice parte nevidă minorată a sa are o margine inferioară.

Observație. Fie K un corp complet ordonat şi $A \subset K$, $A \neq \emptyset$, A majorată. Atunci -A este minorată, sup A există şi sup (A) = - inf (-A).

Lema 4.3.7. Dacă x, y∈$\mathbb{Q}$, atunci :

(i) x ≤y ⇔$i_{\mathbb{Q}}(x) \le i_{\mathbb{Q}}(y)$;

(ii) x<y ⇔$i_{\mathbb{Q}}(x)<i_{\mathbb{Q}}(y)$;

(iii) Pentru orice α∈$\mathbb{R}$ există x, y∈$\mathbb{Z}$ astfel încât $i_Q(x) \le \alpha \le i_Q(y)$.

Demonstrație. (i). Să presupunem că x≤y, adică y-x≥0. Cum $i_{\mathbb{Q}}(y)-i_{\mathbb{Q}}(x)=i_{\mathbb{Q}}(y-x)$ deducem că $i_{\mathbb{Q}}(y) \ge i_{\mathbb{Q}}(x) \Leftrightarrow i_{\mathbb{Q}}(x) \le i_{\mathbb{Q}}(y)$.

Reciproc, să presupunem că $i_Q(x) \le i_Q(y)$, adică $i_Q(y-x) \ge 0 \Rightarrow$ y-x∈P, deci pentru ε>0, y-x>ε>0 ⇒y≥x ⇔ x≤y .

(ii). Rezultă din injectivitatea lui i_Q .

(iii). Fie α∈$\mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\ge0}$∈α. Atunci $(x_n)_{n\ge0}$∈**C($\mathbb{Q}$)**, deci pentru ε∈$\mathbb{Q}_+^*$ există n_ε∈$\mathbb{N}$ astfel încât $| x_n - x_{n_\varepsilon} |<\varepsilon$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$ sau $x_{n_\varepsilon} - \varepsilon<x_n<x_{n_\varepsilon}+\varepsilon$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$.

Luând x, y∈$\mathbb{Z}$ astfel încât $x<x_{n_\varepsilon}-\varepsilon$ şi $x_{n_\varepsilon}+\varepsilon<y$ deducem că $x_n-x>0$ şi $y - x_n>0$ pentru orice $n \ge n_\varepsilon$ deci $(x_n)_{n\ge0} - (x, x, \ldots) = (x_n - x)_{n\ge0}$ ∈P şi $(y,y,\ldots) - (x_n)_{n\ge0} = (y- x_n)_{n\ge0}$ ∈P, adică $i_Q(x) \le \alpha \le i_Q(y)$.

Lema 4.3.8. Fie α, β∈$\mathbb{R}$ şi $(u_n)_{n\ge0}$, $(v_n)_{n\ge0}$ ∈C($\mathbb{Q}$) astfel încât

$$i_{\mathbb{Q}}(u_m) \le \alpha \le \beta \le i_{\mathbb{Q}}(v_m)$$

pentru orice m ∈$\mathbb{N}$ şi $(u_m)_{m\ge0} - (v_m)_{m\ge0}$ ∈N($\mathbb{Q}$) . Atunci α=β .

Demonstrație. Fie ε>0. Există m_0∈$\mathbb{N}$ astfel încât $|v_{m_0} - u_{m_0}|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Fie acum $(x_n)_{n\ge0}$∈α şi $(y_n)_{n\ge0}$∈β . Din inegalitatea din enunț deducem că $i_{\mathbb{Q}}(u_m) \le \alpha$ deci pentru m=m_0 avem $(x_n - u_{m_0})_{n\ge0}$∈P prin urmare există n_ε'∈$\mathbb{N}$ astfel încât $x_n - u_{m_0} > -\frac{\varepsilon}{3}$ pentru $n \ge n_\varepsilon'$. Tot din inegalitatea din enunț rezultă că $\beta \le i_Q(v_m)$ deci pentru m = m_0 avem $(v_{m_0} - y_n)_{n\ge0}$∈P, adică există n_ε''∈$\mathbb{N}$ astfel încât $v_{m_0} - y_n > -\frac{\varepsilon}{3}$, pentru orice $n \ge n_\varepsilon''$, de unde $y_n - x_n < v_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3} - u_{m_0} + \frac{\varepsilon}{3} = v_{m_0} - u_{m_0} + \frac{2\varepsilon}{3} \le \left|v_{m_0} - u_{m_0}\right| + \frac{2\varepsilon}{3} \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$, prin urmare, $y_n - x_n<\varepsilon$ pentru orice $n \ge \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$. Dar α ≤ β. Atunci $(y_n-x_n)_{n\ge0}$∈P, deci există n_ε'''∈$\mathbb{N}$ astfel încât $y_n - x_n > -\varepsilon$, pentru orice $n \ge n_\varepsilon'''$.

Atunci $| x_n - y_n |<\varepsilon$ pentru orice $n \ge \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'', n_\varepsilon''')$, de unde α=β.■

Teorema 4.3.9. Corpul ($\mathbb{R}$, ≤) este complet ordonat .

Demonstrație. Fie A⊂$\mathbb{R}$ nevidă şi minorată iar A_0 mulțimea minoranților lui A. Cum $A_0 \ne \emptyset$, există $\beta \in A_0$ astfel încât β ≤ α pentru orice α∈A. Din Lema 4.3.7, (iii) rezultă existența unui z∈$\mathbb{Z}$ astfel încât $i_{\mathbb{Q}}(z) \le \beta$, adică $i_{\mathbb{Q}}(z) \in A_0$.

Fie $x_0=\max\{z\in\mathbb{Z} : i_Q(z)\in A_0\}$; atunci $i_{\mathbb{Q}}(x_0)\in A_0$ şi $i_{\mathbb{Q}}(x_0+1)\notin A_0$. Presupunem că am obținut un $x_k\in\mathbb{Q}$ (k≥0) astfel încât $i_{\mathbb{Q}}(x_k)\in A_0$ şi $i_{\mathbb{Q}}\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right)\notin A_0$

Notând $n_k = \max\{0\le n\le 9 : i_{\mathbb{Q}}(x_k)+\frac{n}{10^{k+1}} \in A_0\}$ şi $x_{k+1} = x_k + \frac{n_k}{10^{k+1}}$ se obține, prin inducție, un şir $(x_k)_{k\ge0}\in\mathbb{Q}$ astfel încât

(1) $i_{\mathbb{Q}}(x_k)\in A_0$ pentru orice k∈$\mathbb{N}$;

(2) $i_{\mathbb{Q}}(x_k+\frac{1}{10^k})\notin A_0$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$;

(3) $x_{k+1}=x_k+\frac{n_k}{10^{k+1}}$.

Din (3) şi din definiția lui n_k rezultă $x_{k+1}=x_k+\frac{n_k}{10^{k+1}}$, de unde pentru $n > k$ obținem $x_n - x_k = x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + ... + x_{k+1} - x_k \le$

$$\le \frac{9}{10^n}+\frac{9}{10^{n-1}}+...+\frac{9}{10^{k+1}}=\frac{9}{10^{k+1}}\left(1+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10^{n-(k+1)}}\right)=\frac{9}{10^{k+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^{n-k}}}{1-\frac{1}{10}}<\frac{9}{10^{k+1}}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{10^k}$$

deci $(x_n)_{n\ge 0}\in \mathbf{C}(\mathbb{Q})$. Fie $\alpha=\overline{(x_n)_{n\ge0}}\in\mathbb{R}$ şi să demonstrăm că $\alpha=\inf A$.

Pentru aceasta vom demonstra că

$$(*)\qquad i_{\mathbb{Q}}(x_k)\le\alpha\le i_{\mathbb{Q}}\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right) \text{ pentru orice } k\in\mathbb{N}.$$

Din (3) deducem că $x_0 \le x_1 \le . . . \le x_k \le . . .$, deci $(x_n - x_k)_{n\ge0}\in P$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$, adică $i_{\mathbb{Q}}(x_k)\le\overline{(x_n)_{n\ge0}}=\alpha$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

Am demonstrat mai înainte că $x_n - x_k<\frac{1}{10^k}$, pentru $n>k$, adică $\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right)-x_n>0$ pentru $n>k$, deci $\alpha\le i_{\mathbb{Q}}\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right)$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

Am arătat astfel inegalitățile $(*)$.

Să demonstrăm acum că α este minorant al lui A. Să presupunem că există $\gamma\in A$ astfel încât $\gamma<\alpha$. Atunci $i_{\mathbb{Q}}(x_k)\le\gamma\le\alpha\le i_{\mathbb{Q}}\left(x_k+\frac{1}{10^k}\right)$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

Dar $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_k+\frac{1}{10^k}-x_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{10^k}=0$, de unde ținând cont de Lema 4.3.8 deducem că $\gamma=\alpha$, absurd, deci $\alpha\in A_0$.

Să arătăm acum că α este cel mai mare minorant al lui A. Presupunem că există $\beta\in A_0$ astfel încât $\alpha<\beta$. Din (3) deducem că pentru fiecare $k\in\mathbb{N}$ există $\alpha_k\in A$ astfel încât $\alpha_k<i_{\mathbb{Q}}(x_k+\frac{1}{10^k})$. Cum β este minorant al lui A şi $\alpha_k\in A$ deducem că $\beta\le\alpha_k$ de unde $i_{\mathbb{Q}}(x_k)\le\alpha\le\beta\le i_{\mathbb{Q}}(x^k+\frac{1}{10^k})$ de unde deducem (conform Lemei 4.3.8) că $\alpha = \beta$, absurd !.

Deci $\alpha = \inf A$. ■

4.4. Mulțimea numerelor iraționale I

Complementara în $\mathbb{R}$ a lui $\mathbb{Q}$ o vom numi *mulțimea numerelor iraționale* şi o vom nota cu **I** (deci $\mathbf{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), vezi observația de după Definiția 4.2.7.

Să demonstrăm de exemplu că $\sqrt{2}\in\mathbf{I}$. Dacă presupunem prin absurd că $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, atunci putem scrie $\sqrt{2}=m/n$, cu $m, n\in\mathbb{N}^*$ şi $(m, n)=1$. Deducem imediat că $2n^2=m^2$, adică m^2 este număr par, deci m este par, adică $m=2m_1$, cu $m_1\in\mathbb{N}^*$. Înlocuind deducem $n^2=2m_1^2$, adică $n=2n_1$, cu $n_1\in\mathbb{N}^*$. Contradicția constă în aceea că $2|m$ şi $2|n$, contrar presupunerii că $(m, n)=1$.

Observație. Mai general, se demonstrează , analog, că dacă $x\in\mathbb{Q}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ şi $x\neq d^n$, pentru orice $d\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt[n]{x}\in\mathbf{I}$. Deci $\sqrt[3]{2/3}\in\mathbf{I}$, $\sqrt[5]{2^4}\in\mathbf{I}$.

Să mai demonstrăm de exemplu că $\log_2 3\in\mathbf{I}$. Într-adevăr, dacă prin absurd $\log_2 3\in\mathbb{Q}$, atunci există $m, n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $(m, n)=1$ şi $\log_2 3=m/n \Leftrightarrow 2^{m/n}=3 \Leftrightarrow 2^m=3^n$, ceea ce este absurd deoarece $(2, 3)=1$ (mai general deducem că dacă $m, n\in\mathbb{N}^*$, $(m, n)=1$, atunci $\log_m n\in\mathbf{I}$).

Lema 4.4.1. Dacă $x\in\mathbb{Q}$, $y\in\mathbf{I}$, atunci $x+y\in\mathbf{I}$, iar dacă $x\neq 0$ atunci $xy\in\mathbf{I}$.

Demonstrație. Am văzut că $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp. Notând $z=x+y$, dacă prin absurd $z\in\mathbb{Q}$, am deduce că $y=z-x\in\mathbb{Q}$, ceea ce este absurd. Analog pentru partea a doua. ■

De exemplu, $1\pm\sqrt{2}\in\mathbf{I}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\in\mathbf{I}$.

Lema 4.4.2. Operațiile de adunare şi înmulțire nu sunt operații interne pe I.

Demonstrație. Fie $x=1+\sqrt{2}$ şi $y=1-\sqrt{2}$. Cum $1\in\mathbb{Q}$ iar $\sqrt{2}\in\mathbf{I}$, conform lemei precedente deducem că $x, y\in\mathbf{I}$. Cum $x+y=2$ iar $xy=-1$, deducem că $x+y, xy\in\mathbb{Q}$. ■

Observație. Cu toate acestea, este posibil ca pentru $x, y\in\mathbf{I}$ să avem $x+y\in\mathbf{I}$ sau $xy\in\mathbf{I}$ (chiar simultan !).

De exemplu, dacă $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$, atunci $x, y\in\mathbf{I}$ şi $xy=\sqrt{6}\in\mathbf{I}$. Să demonstrăm că şi $x+y\in\mathbf{I}$. Fie pentru aceasta $z=x+y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Dacă prin absurd $z\in\mathbb{Q}$, atunci $z^2=5+2\sqrt{6}$, de unde am deduce că $\sqrt{6}=(z^2-5)/2\in\mathbb{Q}$, absurd ! .

Să prezentăm acum câteva rezultate importante legate de numerele iraționale.

Ştim că $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})$.

Teorema 4.4.3. Numărul $e\in\mathbf{I}$.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că $e\in\mathbb{Q}$, adică $e=a/b$, cu $a, b\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq b$, cum $b\mid k!$ deducem că numărul $c=k!(\frac{a}{b}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-...-\frac{1}{k!})\in\mathbb{Z}$.

Însă $0<c=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}+...<\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{(k+1)^2}+...=\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k+1}}=\dfrac{1}{k}<1$

Contradicția provine din aceea că $c\in(0, 1)$, iar mai înainte am dedus că $c\in\mathbb{Z}$. În concluzie $e\in\mathbf{I}$. ■

Pentru a demonstra că şi alte numere importante sunt iraționale se utilizează un mic „ truc ”, considerând o anumită funcție (de obicei polinomială).

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, fie $f(x)\overset{def}{=}\dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{m=n}^{2n}c_m x^m$, unde $c_m\in\mathbb{Z}$, pentru $n\leq m\leq 2n$.

Pentru $0<x<1$ avem $0<f(x)<\dfrac{1}{n\,!}$.

Este clar că f(0)=0 şi că $f^{(m)}(0)=0$ dacă m < n sau m >2n, iar dacă $n \le m \le 2n$ avem $f^{(m)}(0)=\frac{m!}{n!}c_m \in \mathbb{Z}$.

Deducem ca o concluzie că f, ca şi toate derivatele sale iau valori întregi în x=0 şi cum f(1-x)=f(x) aceeaşi concluzie este valabilă şi în x=1.

Ca un corolar la acest mic truc să demonstrăm:

Teorema 4.4.4. Dacă $y\in\mathbb{Q}^*$, $e^y \in$ I.

Demonstrație. Fie $y=h/k\in\mathbb{Q}^*$ şi să presupunem prin absurd că $e^y\in\mathbb{Q}$.

Atunci $e^h=e^{ky} \in\mathbb{Q}$ şi să punem $e^h=a/b$, cu $a, b\in\mathbb{N}^*$.

Considerăm (pentru n suficient de mare după cum se va vedea în final) funcția : $f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ şi $F(x) \overset{def}{=} h^{2n}f(x)-h^{2n-1}f'(x)+...-hf^{(2n-1)}(x)+f^{(2n)}(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Ținând cont de cele de mai sus deducem că $F(0), F(1) \in\mathbb{Z}$.

De asemenea $\left[e^{hx}F(x)\right]' = e^{hx}\left[hF(x)+F'(x)\right]=h^{2n+1}e^{hx}f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Deducem că : $b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f(x)\ dx = be^{hx}F(x)\Big|_0^1 = aF(1)-bF(0) \in\mathbb{Z}$.

Cum însă 0<f(x)<1/n!, deducem că $0<b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}f(x)\ dx<\frac{bh^{2n}e^h}{n!}<1$ pentru n suficient de mare (căci $\frac{b(h^2e)^n}{n!}\to 0$ pentru $n\to\infty$) ceea ce e contradictoriu !. Deci $e^y\in$**I.** ■

Considerând o funcție f asemănătoare celei pentru care am demonstrat că $e^y\in$**I** pentru $y\in\mathbb{Q}^*$ putem demonstra:

Teorema 4.4.5. Numărul $\pi\in$I.

Demonstrație. Să demonstrăm la început că dacă $n\in\mathbb{N}$, $g\in\mathbb{Z}[X]$, atunci $f(x)=x^n g(x)$ are toate derivatele sale în 0 întregi divizibili prin n!.

Într-adevăr, orice termen al lui g(x) este de forma cx^j cu c, $j\in\mathbb{Z}$, $c\neq0$, $j\geq0$ iar termenul corespunzător în f(x) este cx^{j+n}. Astfel dacă vom demonstra lucrul acesta pentru un singur termen al lui f, atunci el va rezulta în general pentru f. Pentru x=0 este usor de văzut că cx^{n+j} şi derivatele sale sunt zero, cu o singură excepție şi anume la derivata sa de ordin j+n care este egală cu c[(j+n)!] şi cum $j\geq0$ deducem că n! | c[(j+n)!]. Să revenim acum şi să demonstrăm că $\pi\in$**I**.

Presupunem prin absurd că $\pi=a/b\in\mathbb{Q}$ (cu $a, b\in\mathbb{N}^*$) şi să considerăm polinomul $f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}=\frac{b^nx^n(\pi-x)^n}{n!}$ (n va fi pus în evidență ceva mai târziu).

Considerăm $g(x)=(a-bx)^n$; conform celor remarcate la început putem trage concluzia că $x^n(a-bx)^n$ şi toate derivatele sale calculate în 0 sunt întregi divizibili prin n!. Prin urmare, împărțind prin n! deducem că f(x) şi toate derivatele sale calculate în x=0 sunt întregi, deci $f^{(j)}(0)\in\mathbb{Z}$, pentru orice j=1, 2, …(cu $f^{(0)}=f$). Cum $f(\pi-x)=f(x)$ deducem că $(-1)^j f^{(j)}(\pi-x) = f^{(j)}(x)$, pentru orice $j\geq1$. Considerând x=0 deducem că $f^{(j)}(\pi)\in\mathbb{Z}$, pentru orice j=1, 2,….

Fie $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) +…+ (-1)^n f^{(2n)}(x)$.

Deducem că $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x)- f^{(8)}(x) +…+ (-1)^{n-1} f^{(2n)}(x)$ (căci $f^{(2n+2)}(x)=0$, f fiind polinom de grad 2n).

Deducem că $F(x) + F^{(2)}(x) =f(x)$ iar de aici că $F(0), F(\pi)\in\mathbb{Z}$.

Cum $(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$, deducem că : $\int_0^{\pi} f(x)\ \sin x = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)\Big|_0^{\pi} = F(\pi) - F(0) \in \mathbb{Z}$.

Vom demonstra însă că pentru n suficient de mare avem $0 < \int_0^{\pi} f(x)\sin x\ dx < 1$ şi atunci contradicţia va fi clară.

Cum pentru $x\in[0,\ \pi]$, $f(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ deducem că $f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ şi astfel $0 < \int_0^{\pi} f(x)\sin x\ dx < \frac{\pi^n a^n}{n!}\pi < 1$ pentru orice $n>n_0$ căci $\frac{(\pi a)^n}{n!}\pi \to 0$ pentru $n\to\infty$. ■

În legătură cu felul în care funcţiile trigonometrice generează numere iraţionale prezentăm:

Teorema 4.4.6. Fie θ un multiplu raţional de π (adică $\theta=r\cdot\pi$, cu $r\in\mathbb{Q}$). Atunci sin θ, cos θ, tg θ∈I, cu excepţia cazurilor când tg θ nu este definit iar cos θ, sin θ∈{0, ±1/2, ±1}, tg θ∈{0, ±1}.

Demonstraţie. Pentru orice număr natural n vom proba prin inducţie matematică existenţa unui polinom $f_n\in\mathbb{Z}[X]$ de grad n cu coeficientul dominant 1 astfel încât $2\cos n\theta = f_n(2\cos\theta)$, pentru orice $\theta\in\mathbb{R}$.

Cum $2\cdot\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2-2$ deducem că $f_1(x)=x$ şi $f_2(x)=x^2-2$.

Cum $2\cdot\cos(n+1)\theta=(2\cos\theta)(2\cos n\theta)-2\cos(n-1)\theta$ deducem că $f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_{n-1}(x)$ şi astfel prin inducţie matematică existenţa polinomului f_n este asigurată.

Fie acum $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\cdot r\in\mathbb{Z}$. Dacă $\theta = r\cdot\pi$ rezultă că $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta = 2\cos nr\pi = \pm 2$ („+” dacă nr este par şi „-” dacă nr este impar). Astfel $2\cos\theta$ este soluţie a ecuaţiei $f_n(x)\pm 2=0$.

Eliminând cazul $\cos\theta=0$, cum $2\cos\theta$ este rădăcina unei ecuaţii de forma $f_n(x)\pm 2=0$ cu coeficientul dominant 1, dacă $2\cos\theta\in\mathbb{Q}$, cu necesitate $2\cdot\cos\theta\in\mathbb{Z}^*$. Cum $-1\le\cos\theta\le 1$ deducem că $2\cos\theta=\pm1, \pm2$, adică $\cos\theta\in\{\pm1, \pm1/2\}$.

Astfel, în cazul lui cos θ teorema este demonstrată .

În cazul lui sin θ, dacă θ este multiplu raţional de π, la fel este şi π/2-θ şi din identitatea $\sin\theta=\cos(\pi/2-\theta)$ deducem concluzia teoremei pentru sin θ.

În final din identitatea $\cos 2\theta=(1-tg^2\theta)/(1+tg^2\theta)$ deducem că dacă $tg\theta\in\mathbb{Q}$ atunci şi $\cos 2\theta\in\mathbb{Q}$. Ţinând cont de cele stabilite în cazul lui cos θ deducem că $\cos 2\theta = 0, \pm1/2, \pm1$.

Dacă $\cos 2\theta=0$, atunci $tg\theta=\pm 1$; dacă $\cos 2\theta = 1$ atunci $tg\,\theta = 0$ iar dacă $\cos 2\theta=-1$, atunci tg θ nu este definită.

Dacă $\cos 2\theta = \pm1/2$ atunci $tg\ \theta\in\{\pm\sqrt{3},\ \pm1/\sqrt{3}\}$ şi cu aceasta teorema este demonstrată. ■

Teorema 4.4.7. Numărul e nu este iraţional pătratic.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există $a, b, c\in\mathbb{Z}$, nu toate nule, astfel încât $ae^2+be+c=0$. Cum $e\in\mathbf{I}$ avem $a\neq0$ şi $c\neq0$. Să presupunem de exemplu că $a>0$.

Atunci $ae + b + ce^{-1} = 0$, $a>0$, $c\neq0$.

Reamintim că $\frac{1}{e} = \sum_{k\geq0}\frac{(-1)^n}{k!}$.

Să notăm $B_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$; avem că $B_n \in \mathbb{Z}$, n=1, 2, … şi să mai considerăm şi

$$b_n = n!\sum_{k\geq n+1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{k!} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} ....$$

Avem că $0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < b_n < \frac{1}{n+1}$.

Astfel: ($\star$) $n!(ae + b + ce^{-1}) = (aA_n + bn! + cB_n) + (aa_n + (-1)^{n+1}cb_n) = C_n + c_n = 0$ unde $C_n = (aA_n + bn! + cB_n) \in \mathbb{Z}$ şi $c_n = aa_n + (-1)^{n+1}cb_n$, $n \geq 1$.

Alegem acum n astfel încât $n \geq 2a + |c|$ şi $(-1)^{n+1}c > 0$. Cum $a > 0$ avem că $0 < c_n = aa_n + (-1)^{n+1}cb_n < \frac{2a+|c|}{n+1} < 1$, ceea ce contrazice ($\star$). ■

4.5. Numere algebrice şi numere transcendente

Definiția 4.5.1. Un număr $\alpha \in \mathbb{C}$ se zice *algebric* dacă există $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$ astfel încât $f(\alpha) = 0$. Un număr ce nu este algebric se zice *transcendent.*

Evident, orice număr rațional este algebric .

De asemenea, $i = \sqrt{-1}$ este algebric (fiind soluție a ecuației algebrice $X^2+1=0$).

Dacă un număr algebric α este rădăcina unui polinom nenul $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grad minim n, vom spune că α este de grad n (astfel un număr rațional este algebric de grad 1).

Teorema 4.5.2. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Demonstrație. Cunoaştem că orice număr algebric α este soluție a unei ecuații: $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ cu $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq n$, $n \geq 1$ nu toți nuli. Dacă notăm $N = n + |a_0| + \ldots + |a_n|$, atunci cu necesitate $N \geq 1$. Pentru fiecare n fixat există numai un număr finit de ecuații algebrice de forma celei de mai sus şi fiecare dintre acestea au numai un număr finit de soluții.

În concluzie, numărul numerelor algebrice corespunzătoare lui N este finit; fie E_N mulțimea acestora. Cum mulțimea E a numerelor algebrice este o submulțime a mulțimii $\bigcup_{N\geq 2} E_N$ (care este numărabilă), deducem că E este numărabilă.■

Ca un corolar deducem imediat:

Teorema 4.5.3. Atât în $\mathbb{C}$ cât şi în $\mathbb{R}$, mulțimea numerelor transcendente este numărabilă.

Teorema 4.5.4. (*Criteriul lui Liouville*) Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ ireductibil de gradul $r \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ o rădăcină a lui f şi p, $q \in \mathbb{Z}$ cu $q \in \mathbb{N}^*$. Atunci există un număr real $c > 0$ ce nu depinde de p şi q astfel încât $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^r}$.

Demonstrație. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_rX^r \in \mathbb{Z}[X]$ polinomul minimal al lui α. Putem presupune că $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$ (căci în caz contrar putem lua c=1).

Atunci fie $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ toate rădăcinile lui f (conform Teoremei 5.2.3 acestea sunt în $\mathbb{C}$). Avem $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |a_r| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \left|\prod_{i=2}^{r}\left(\alpha_i - \frac{p}{q}\right)\right| \leq |a_r| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{r}(|\alpha| + 1 + |\alpha_i|) = c' \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, unde $c'>0$ este o constantă ce nu depinde de p şi q.

Pe de altă parte, $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^r}$ şi astfel teorema este demonstrată. ■

Observaţie. Criteriul precedent exprimă faptul că, într-un anumit mod, numerele algebrice nu pot fi suficient de bine aproximate prin numere raţionale.

Corolar 4.5.5. Numărul $\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{n!}}$ este transcendent (adică nu este algebric).

Demonstraţie. Să arătăm la început că $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dacă prin absurd $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ cu p, $q\in\mathbb{N}^*$, atunci considerând un număr întreg $k\geq 1$ şi înmulţind relaţia $\alpha=\frac{p}{q}$ cu $3^{k!}q$ obţinem o relaţie de forma $a = b+q\sum_{n\geq k+1}\frac{1}{3^{n!-k!}}$ cu $a, b\in\mathbb{Z}$. Este suficient să arătăm că numărul $d=q\sum_{n\geq k+1}3^{-n!+k!}\notin\mathbb{Z}$ pentru k suficient de mare. Un astfel de k există deoarece d este restul unei serii convergente ; deci $\alpha\notin\mathbb{Z}$.

Să presupunem acum că α ar fi algebric. Atunci polinomul minimal al său ar avea gradul $r\geq 2$. Fie c constanta din Criteriul lui Liouville de mai sus asociată lui α. Considerăm $k\geq 1$ întreg şi $s=\sum_{n=1}^{k}3^{-n!}$. Atunci avem $|\alpha - s| = \sum_{n\geq k+1}3^{-n!}$. Luând k suficient de mare, obţinem inegalitatea $3^{r\,k!}\sum_{n\geq k+1}3^{-n!}<c$ ceea ce contrazice Criteriul lui Liouville, absurd!. ■

În continuare vom mai prezenta şi alte exemple.

Teorema 4.5.6. (*Hermite*) Numărul e este transcendent.

Demonstraţie. Fie $I(t)=\int_0^t e^{t-x}f(x)\ dx$, definită pentru $t \geq 0$, unde $f\in\mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad m. Integrând prin părţi obţinem: $I(t)=e^t\sum_{j=1}^{m}f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}f^{(j)}(t)$.

Se observă că dacă prin $\bar{f}$ desemnăm polinomul ce se obţine înlocuind coeficienţii lui f cu valorile lor absolute, atunci :

$$|\ I(t)\ |\leq\int_0^t\left|\ e^{t-x}f(x)\ \right|\ dx\leq te^t\bar{f}(t).$$

Să presupunem acum prin absurd că e este algebric. Atunci există $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{Z}$ cu $a_0\neq 0$ astfel încât $a_0+a_1e+\ldots+a_ne^n=0$.

Fie $f(x)=x^{p-1}(x-1)^p\ldots(x-n)^p$ unde p este un număr prim (care va fi convenabil ales).

Atunci gradul lui f este $(n+1)p-1$.

Fie $J=a_0I(0)+a_1I(1)+\ldots+a_nI(n)$. Avem $J=-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(j)}(k)$.

Însă pentru $1\leq k\leq n$ avem $f^{(j)}(k)=0$ pentru $j<p$ şi $f^{(j)}(k)=C_p^j\,p!\,g^{(j-p)}(k)$ pentru $j\geq p$, unde $g(x)=f(x)/(x-k)^p$.

Atunci pentru orice j, $f^{(j)}(k)$ este un întreg divizibil prin p!.

Mai mult, avem că $f^{(j)}(0)=0$, pentru $j<p-1$ şi $f^{(j)}(0)=C_{p-1}^j(p-1)!\cdot h^{(j-p+1)}(0)$ pentru $j\geq p-1$, unde $h(x)=f(x)/x^{p-1}$. Evident $h^{(j)}(0)$ este un număr întreg divizibil prin p pentru $j>0$ şi

$h(0)=(-1)^{np}(n!)^p$. Atunci pentru $j\neq p-1$, $f^{(j)}(0)$ este un întreg divizibil prin p! şi $f^{(p-1)}(0)$ este întreg divizibil prin (p-1)!, însă nu prin p pentru p>n. Rezultă că J este un întreg nenul divizibil prin (p-1)!, deci $|J|\geq(p-1)!$.

Pe de altă parte, ţinând cont de faptul că $\bar{f}(k)\leq(2n)^m$ şi $m\leq 2np$ deducem că $|J|\leq|a_1|e\bar{f}(1)+\ldots+|a_n|\,n\,e^n\bar{f}(n)\leq e^p$ pentru un anumit c ce nu depinde de p.

Alegând p prim suficient de mare (astfel încât $(p-1)!>c^p$) ajungem la o contradicţie evidentă, de unde rezultă că presupunerea că e este algebric este falsă, rezultând deci că e nu este algebric, adică este transcendent. ■

Corolar 4.5.7. Numărul $e\in I$.

Observaţie. Deşi iraţionalitatea lui e rezultă din aceea că e este transcendent trebuie reţinută şi demonstraţia precedentă pentru faptul că e este iraţional, fie şi numai pentru frumuseţea metodei folosite.

Teorema 4.5.8. (*Lindemann*) Numărul *π* este transcendent.

Demonstraţie. Să stabilim la început aşa- zisa ,,identitate a lui Hermite":

Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ de grad n şi $F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x)$.

Atunci $e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt=F(0)e^x-F(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Într-adevăr, integrând prin părţi obţinem relaţia: $\int_0^x f(t)e^{-t}dt=f(0)-f(x)e^{-x}+\int_0^x f'(t)e^{-t}dt$.

Repetând de n+1 ori integrarea prin părţi obţinem egalitatea: $\int_0^x f(t)e^{-t}dt=F(0)-F(x)e^{-x}$,

din care rezultă acum identitatea lui Hermite.

Să revenim acum la demonstrarea transcendenţei lui π.

Pe lângă identitatea lui Hermite vom mai folosi şi ecuatia $e^{\pi i}+1=0$.

Să presupunem prin absurd că π este algebric. Atunci $\gamma=\pi i$ este de asemenea algebric; fie n=gradul lui γ şi $\gamma=\gamma_1, \gamma_2\ldots\gamma_n$ conjugaţii lui γ.

Cum $e^{\gamma}+1=0$, avem $\prod_{i=1}^{n}(1+e^{\gamma_i})=0$ de unde deducem că :

$$(1)\qquad \prod_{i=1}^{n}(1+e^{\gamma_i})=\sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\ldots\sum_{\varepsilon_n=0}^{1}e^{\varepsilon_1\gamma_1+\ldots+\varepsilon_n\gamma_n}=0$$

Presupunem că în relaţia de mai sus sunt exact m exponenţi nenuli şi $a=2^n-m$ care sunt zero ($a\geq 1$). Atunci, dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sunt exponenţii nenuli putem pune relaţia (1) de mai sus sub forma (2) $a+e^{\alpha_1}+\ldots+e^{\alpha_m}=0$, $a\geq1$.

Vom arăta că numerele $\alpha_1,\ldots, \alpha_m$ formează mulţimea rădăcinilor unui polinom $\psi\in\mathbb{Z}[X]$ de grad m.

Pentru aceasta să observăm că polinomul $\varphi(x)=\prod_{\varepsilon_1=0}^{1}\ldots\prod_{\varepsilon_n=0}^{1}[x-(\varepsilon_1\gamma_1+\ldots+\varepsilon_n\gamma_n)]$

considerat ca polinom în $\gamma_1,\ldots, \gamma_n$ cu coeficienţi în $\mathbb{Z}[X]$ este simetric în $\gamma_1,\ldots, \gamma_n$, deci $\varphi(x)\in\mathbb{Q}[X]$.

Atunci rădăcinile polinomului φ(x) (de grad 2^n) sunt $\alpha_1,\ldots\alpha_m$ şi 0 (cu multiplicitate a). Deci polinomul $x^{-a}\varphi(x)\in\mathbb{Q}[X]$ (de grad m) are drept rădăcini pe $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$.

Dacă $r\in\mathbb{N}$ este c.m.m.m.c al numitorilor coeficienţilor acestui polinom atunci $\psi(x)=(\gamma/x^a)\varphi(x)=b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0\in\mathbb{Z}[X]$ ($b_m>0$, $b_0\neq0$) are exact rădăcinile $\alpha_1,\ldots, \alpha_m$.

În identitatea lui Hermite vom considera succesiv $x=\alpha_1,\ldots, \alpha_m$.

Dacă adunăm şi ţinem cont de (2) obţinem :

(3) $\qquad -aF(0)-\sum_{k=1}^{m}F(\alpha_k)=\sum_{k=1}^{m}e^{\alpha_k}\int_0^{\alpha_k}f(t)e^{-t}dt$

De aici demonstrația transcendenței lui π merge ca şi în cazul transcendenței lui e.
Pentru aceasta în (3) vom considera:

(4) $f(x)=\frac{1}{(n-1)!}b_m^{mn-1}x^{n-1}\psi^n(x)=\frac{1}{(n-1)!}b_m^{(m+1)n-1}x^{n-1}(x-\alpha_1)^n...(x-\alpha_m)^n$

unde n este un număr natural ce va fi ales suficient de mare. Vom demonstra că alegând pe f ca mai sus, din (3) vom ajunge la o contradicție.

Obținem imediat relațiile:

(5) $\begin{cases} f^{(l)}(0)=0,\ l=0,1,\dots,n-2 \\ f^{(n-1)}(0)=b_m^{mn-1}b_0^n \\ F(0)=\sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1}f^{(l)}(0)=b_m^{mn-1}b_0^n+nA \quad (A\in\mathbb{Z}) \end{cases}$

Cum α_k este o rădăcină a lui f(x) de multiplicitate n obținem că

(6) $f^{(l)}(\alpha_k)=0$, l=0, 1,…,n-1, k=1, 2,…, m .

Analog ca în cazul lui e derivata de ordin l a lui $x^{n-1}\psi^n(x)$ are coeficienți divizibili prin n!. Deci pentru l > n coeficienții lui $f^{(l)}(x)$ sunt întregi şi divizibili prin $b_m^{mn-1}n$.

Atunci din (6) deducem că

(7) $F(\alpha_k)=\sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1}f^{(l)}(\alpha_k)=nb_m^{mn-1}\Phi(\alpha_k)$, k=1,…,m cu $\Phi(z)\in\mathbb{Z}[z]$.

Numerele $\beta_k=b_m\alpha_k$, k=1,…,m sunt întregi algebrici ce formează mulțimea rădăcinilor unui polinom de grad m din $\mathbb{Z}[X]$ cu coeficientul dominant 1.

Mai mult, $b_m^{mn-1}\Phi(\alpha_k)=H(\beta_k)$, $H\in\mathbb{Z}[X]$.

Atunci (8) $\qquad \sum_{k=1}^{m}b_m^{mn-1}\Phi(\alpha_k)=\sum_{k=1}^{m}H(\beta_k)=B$, $B\in\mathbb{Z}$.

Din (5), (7), (8) deducem că : (9) $\quad aF(0)+\sum_{k=1}^{m}F(\alpha_k)=ab_0b_m^{mn-1}+n(aA+B)$.

Fie acum $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $(n, b_0b_m)=1$ şi n>1. Membrul drept al lui (9) este un întreg nedivizibil cu n şi deci nenul, de unde : (10) $\left|\ aF(0)+\sum_{k=1}^{m}F(\alpha_k)\ \right|\ge 1$.

Să căutăm acum o majorare a membrului drept din (3).

Să presupunem că toate punnctele $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ sunt conținute în cercul $|x|\le R$ şi să notăm $\max\limits_{|x|\le R}\left|b_m^m\psi(x)\right|=c$, cu c nedepinzând de n. Atunci $\max\limits_{|x|\le R}|f(x)|\le\frac{R^{n-1}c^n}{(n-1)!}$.

Există deci n_0 astfel încât pentru orice $n\ge n_0$ ce satisface (10) să avem inegalitatea (11):

$$\left|\sum_{k=1}^{m}e^{\alpha_k}\int_0^{\alpha_k}f(x)e^{-x}dx\right|\le\sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^{\alpha_k}|f(x)|\cdot e^{\alpha_k-x}dx\right|\le\frac{R^{n-1}e^R}{(n-1)!}c^n\sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^{\alpha_k}dx\right|\le me^R\frac{(Rc)^n}{(n-1)!}<1$$

Din (10), (11) şi (3) deducem că 1<1 -absurd! . ■

Capitolul 5

CORPUL NUMERELOR COMPLEXE $(\mathbb{C},+,\cdot)$

5.1. Construcția corpului numerelor complexe $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Scopul acestui paragraf este de a identifica corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale cu un subcorp al unui corp comutativ $\mathbb{C}$ în care ecuația $x^2 = -1$ are soluție.

Pentru aceasta vom considera $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ iar pentru $(x, y), (z, t)\in\mathbb{C}$ definim :

$$(x, y)+(z, t)=(x+z, y+t)$$
$$(x, y)\cdot(z, t)=(xz-yt, xt+yz).$$

Teorema 5.1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ în care ecuația $x^2=-1$ are soluție.

Demonstrație. Faptul că $(\mathbb{C}, +)$ este grup abelian se probează imediat (elementul neutru este $(0,0)$, iar pentru $(x,y)\in\mathbb{C}$, $-(x, y)=(-x, -y)$).

În mod evident înmulțirea este comutativă.

Pentru a proba că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este grup, fie $(x, y), (z, t), (r, s)\in\mathbb{C}$. Deoarece $(x, y)[(z, t)\cdot(r, s)]=[(x, y)(z, t)]\cdot(r, s)=(xzr-xts-yzs-ytr, xzs+xtr+yzr-yts)$ deducem că înmulțirea este asociativă. Cum $(x, y)(1, 0)=(1, 0)(x, y)=(x, y)$ deducem că elementul neutru față de înmulțire este $(1, 0)$. Fie acum $(x, y)\in\mathbb{C}^*$ (adică $x\neq0$ sau $y\neq0$). Egalitatea $(x, y).(x', y')=(1, 0)$ este echivalentă cu $xx'-yy'=1$ şi $xy'+yx'=0$, de unde $x'=\frac{x}{x^2+y^2}$ şi $y'=-\frac{y}{x^2+y^2}$, adică $(x, y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Cum pentru $(x, y), (z, t), (r, s)\in\mathbb{C}$, $(x, y)\cdot[(z, t)+(r, s)]=(x, y)\cdot(z, t)+(x, y)\cdot(r, s)=(xz+xr-yt-ys, xt+xs+yz+yr)$ deducem că înmulțirea este distributivă față de adunare, adică $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Să notăm $i=(0, 1)$. Cum $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$ deducem că ecuația $x^2 =-1$ are soluție în $\mathbb{C}$. ∎

Observație. Se probează imediat că $i_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $i_{\mathbb{R}}(x)=(x, 0)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, este morfism de corpuri (deci funcție injectivă).

În felul acesta $\mathbb{R}$ poate fi privit ca subcorp al lui $\mathbb{C}$. Am construit astfel şirul de mulțimi $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

Deoarece pentru $z = (x, y)\in\mathbb{C}$ putem scrie $z = (x, 0)+(y, 0)(0, 1)$, ținând cont de identificările anterioare deducem că z se poate scrie (formal) sub forma $z = x+iy$ (cu $i = (0, 1)$ iar $i^2 = -1$).

Mulțimea $\mathbb{C}$ poartă numele de *mulțimea numerelor complexe*, iar $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *corpul numerelor complexe.* Elementele din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ se zic *pur imaginare*.

Dacă $z = x+iy\in\mathbb{C}$ cu $x, y\in\mathbb{R}$, atunci x se zice *partea reală* a lui z iar yi *partea imaginară* a lui z (y se numeşte *coeficientul părții imaginare*).

Pentru $z\in\mathbb{C}$, $z = x+iy$, definim $\overline{z} = x - iy$ (ce se va numi *conjugatul* lui z) şi $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (|z| poartă numele de *modulul* lui z).

Propoziţia 5.1.2. Fie z, z_1, $z_2\in\mathbb{C}$. Atunci

(i) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

(ii) $\overline{\overline{z}} = z \quad, z\cdot\overline{z} = |z|^2$

(iii) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \quad , \quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (cu $z_2\neq0$)

(iv) $|z| = |\overline{z}|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (cu $z_2\neq0$).

Demonstraţie. (i). Fie z=a+ib. Dacă $z\in\mathbb{R}$, atunci b=0, deci $\overline{z} = a = z$ iar dacă $z = \overline{z}$ atunci b =-b adică b=0, deci $z\in\mathbb{R}$.

Să mai probăm inegalitatea $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ (celelalte probându-se imediat). Alegem $z_1=x_1+iy_1$ şi $z_2=x_2+iy_2$ cu $x_1, x_2, y_1, y_2\in\mathbb{R}$ şi astfel

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \Leftrightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 \le x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$

$\Leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \Leftrightarrow (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \ge 0$, ceea ce este evident.

Egalitate avem dacă $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \lambda$ cu $\lambda\in\mathbb{R}$, adică $z_1 = \lambda\ z_2$. ■

Observaţie. Asociind fiecărui număr complex z = a+ib matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ se probează imediat că corpul $(\mathbb{C},+,\cdot)$ este izomorf cu corpul $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b\in\mathbb{R}\right\}$ operaţiile de adunare şi înmulţire fiind cele obişnuite din $M_2(\mathbb{R})$.

5.2. Teorema fundamentală a algebrei

Dacă L şi K sunt două corpuri astfel încât K este subcorp al lui L, spunem despre L că este o *extindere* a lui K.

Reamintim un rezultat clasic din algebră :

Lema 5.2.1. Dacă K este un corp comutativ iar f∈K[X], grad(f) ≥1, atunci există o extindere L a lui K în care f are toate rădăcinile.

Utilizând teorema fundamentală a polinoamelor simetrice obţinem imediat:

Lema 5.2.2. Fie f∈K[X], cu grad(f) ≥1 iar K este corp comutativ.

Dacă L este o extindere a lui K în care f are toate rădăcinile $x_1, \dots x_n$ iar $g\in K[X_1, \dots X_n]$ este un polinom simetric, atunci $g(x_1, \dots x_n)\in K$.

Teorema următoare (ce se bazează pe cele două rezultate anterioare) este cunoscută sub numele de *teorema fundamentală a algebrei* :

Teorema 5.2.3. (*D'Alembert-Gauss*) Orice polinom $f\in\mathbb{C}[X]$ cu grad(f) ≥ 1 are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

Demonstrație. Fie $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n \in\mathbb{C}[X]$ ($a_n\neq0$) și $\overline{f}=\overline{a_0}+\overline{a_1}X+\ldots+\overline{a_n}X^n$ unde pentru orice $0\leq i\leq n$, $\overline{a_i}$ este conjugatul lui a_i.

Atunci $f\cdot\overline{f}=\sum\limits_{k=0}^{2n}c_kX^k$, unde $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_i\overline{a_j}$, $0\leq k\leq 2n$ și cum $c_k=\overline{c_k}$ pentru orice $0\leq k\leq 2n$, deducem că $f\cdot\overline{f}\in\mathbb{R}[X]$.

Să presupunem că teorema este demonstrată pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$. Atunci există $a\in\mathbb{C}$ astfel încât $(f\cdot\overline{f})(a)=0 \Leftrightarrow f(a)\overline{f}(a)=0 \Leftrightarrow f(a)=0$ sau $f(\overline{a})=0$.

Deci este suficient să presupunem că $f\in\mathbb{R}[X]$. Dacă gradul lui f este impar, cum funcția polinomială atașată lui f este continuă iar la $\pm\infty$ ia valori de semne contrare, deducem că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$.

Fie acum $n=\text{grad}(f)$, $n=2^kp$, cu $k\in\mathbb{N}$ și p impar ; facem inducție matematică după k. Pentru $k=0$ totul rezultă din cele de mai înainte (gradul lui f fiind impar în această situație). Să presupunem afirmația adevărată pentru toate polinoamele $f\in\mathbb{R}[X]$ al căror grad se divide prin 2^{k-1} și nu se divide prin 2^k.

Conform Lemei 5.2.1 există o extindere L a lui $\mathbb{C}$ în care f are toate rădăcinile $x_1,\ldots x_n$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ considerăm elementele $z_{ij}^a=x_ix_j+a(x_i+x_j)$, $1\leq i<j\leq n$ (în număr de C_n^2). Considerând polinomul $f_a=\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(X-z_{ij}^a)$ acesta va avea gradul egal cu $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2^kp(2^kp-1)}{2}=2^{k-1}p'$ cu p' impar. Coeficienții lui f_a sunt polinoame simetrice de z_{ij}^a. Mai mult, având în vedere expresiile lui z_{ij}^a, $1\leq i<j\leq n$, rezultă că acești coeficienți, ca polinoame de $x_1, x_2,\ldots x_n$ sunt simetrice, deoarece orice permutare a acestora are ca efect schimbarea elementelor z_{ij}^a, $1\leq i<j\leq n$ între ele. Conform Lemei 5.2.2 obținem că $f_a\in\mathbb{R}[X]$.

Cum $2^{k-1}\mid$ grad (f_a) și $2^k\nmid$ grad (f_a), conform ipotezei de inducție rezultă că f_a are cel puțin o rădăcină complexă. Există deci o pereche (i, j) cu $1\leq i<j\leq n$ astfel încât $z_{ij}^a\in\mathbb{C}$. Făcând pe a să parcurgă mulțimea infinită $\mathbb{R}$ rezultă că există $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$ astfel încât z_{ij}^a și $z_{ij}^b\in\mathbb{C}$. Din

$$z_{ij}^a=x_ix_j+a(x_i+x_j) \text{ și } z_{ij}^b=x_ix_j+b(x_i+x_j)$$

rezultă că $z_{ij}^a-z_{ij}^b=(a-b)(x_i+x_j)\in\mathbb{C}$, deci $x_i+x_j\in\mathbb{C}$; atunci $x_ix_j\in\mathbb{C}$, adică x_i , $x_j\in\mathbb{C}$ și astfel teorema este demonstrată. ■

Observații. 1. Din Teorema 5.2.3 deducem imediat că dacă $f\in\mathbb{C}[X]$, grad(f)≥1, atunci f are toate rădăcinile în $\mathbb{C}$. Acest lucru ne permite să afirmăm că Teorema fundamentală a algebrei exprimă faptul că corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe este algebric închis.

2. Tot din Teorema 5.2.3 deducem imediat că în $\mathbb{C}[X]$ polinoamele ireductibile sunt exact polinoamele de gradul 1 iar în $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul 1 precum și cele de forma aX^2+bX+c cu $b^2-4ac<0$.

Capitolul 6

CÂTEVA PRINCIPII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

6.1. Principiul lui Dirichlet

Teorema 6.1.1. (*Principiul lui Dirichlet*) Fie A o mulțime nevidă iar A_1, A_2, ..., A_n o partiție a lui A (adică $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ iar $A_i \cap A_j =$ Ø, pentru i ≠ j).

Dacă avem n+1 elemente a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} din A, atunci există o submulțime A_i a partiției care să conțină cel puțin două elemente ale mulțimii $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

Aplicații.

1. Fie a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} un şir de n+1 numere întregi diferite două câte două. Atunci există doi indici i, j $\in\{1, 2, ..., n+1\}$ astfel încât $a_i \equiv a_j \pmod{n}$.

Soluție. Împărțim mulțimea $\mathbb{Z}$ în cele n clase de resturi modulo n. Cum acestea formează o partiție a lui $\mathbb{Z}$, totul rezultă din principiul lui Dirichlet.

2. Fie M o mulțime formată din n numere întregi (nu neapărat distincte). Să se demonstreze că M are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

(Gh. Szölösy)

Soluție. Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ cu $a_i\in\mathbb{Z}$, pentru orice $i\in\{1, 2, ..., n\}$. Să considerăm submulțimile lui M: $M_1 = \{a_1\}$, $M_2 = \{a_1, a_2\}$, ..., $M_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi să formăm sumele: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + ...+ a_n$. Dacă unul din numerele S_1, S_2, ..., S_n se divide cu n, problema este rezolvată. Dacă S_1, S_2, ..., S_n nu se divid la n, atunci conform aplicației anterioare există p, k $\in \mathbb{N}$, $k<p\leq n$, astfel încât $S_p \equiv S_k \pmod{n}$. Atunci mulțimea căutată va fi $\{a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_p\}$.

3. Se dă un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție. Să împărțim fiecare muchie a cubului în câte trei părți egale şi ducând prin ele paralele la muchii obținem pe fiecare față a cubului 9 pătrate egale. Ducând plane paralele cu fețele cubului prin punctele de diviziune, cubul este astfel împărțit în 27 de cubulețe, fiecare având latura $\frac{1}{3}$. Cum sunt 28 de puncte interioare, conform pricipiului lui Dirichlet, cel puțin două se vor afla în interiorul aceluiaşi cubuleț de latură $\frac{1}{3}$. Distanța maximă dintre cele două puncte nu poate depăşi diagonala unui astfel de cubuleț, care este de $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Fiind date 9 puncte în interiorul pătratului unitate, să se demonstreze că există printre ele trei puncte, care să fie vârfurile unui triunghi, de arie mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluție. Unind două câte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat obținem o împărțire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Conform principiului lui Dirichlet cel puțin unul dintre acestea va conține trei sau mai multe puncte din cele 9 considerate în enunț. Notăm EFGH acest pătrat şi fie A, B, C trei dintre aceste puncte conținute în pătratul EFGH de latură $\frac{1}{2}$ obținut ca mai înainte (vezi Fig. 1); va fi suficient să probăm că $S_{ABC} \le \frac{1}{2} \cdot S_{EFGH}$. Ducând prin A, B, C paralele la EH, una din ele se va afla între celelalte două, deci va tăia în interior latura opusă prin care aceasta trece. Fie AA′ aceasta, cu A′∈BC; construim BB′ ⊥ AA′ cu B′∈AA′ şi CC′ ⊥ AA′ cu C′∈AA′.

Avem $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{ACA'} = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BB' + \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot CC' =$

$$= \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot (BB' + CC') \le \frac{1}{2} \cdot EH \cdot HG = \frac{1}{8}.$$

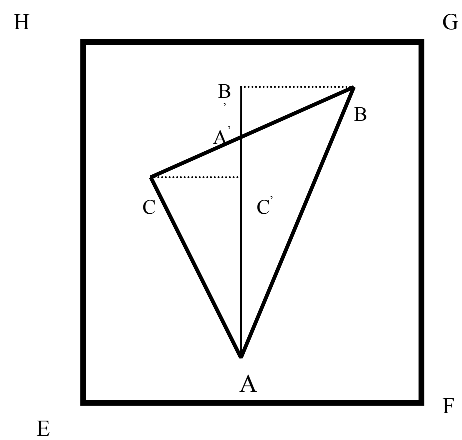

Fig. 1

Observație. În cazul în care punctele A, B, C sunt coliniare, demonstrația nu poate fi făcută în acest mod, însă atunci $S_{ABC} = 0$.

6.2. Principiul inducției matematice

În multe exerciții şi probleme se cere să se demonstreze anumite proprietăți ce depind de un număr natural n.

Asemenea probleme se soluționează în majoritatea cazurilor cu ajutorul *principiului inducției matematice complete* care are la bază următoarea teoremă:

Teorema 6.2.1. Dacă o proprietate P(n) (depinzând de un număr natural n) este adevărată pentru n=0 şi pentru orice n este adevărată implicația logică: „ P(n) adevărată ⇒ P(n+1) adevărată”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n.

Principiul inducției matematice se mai enunță şi sub următoarele forme generalizate:

Teorema 6.2.2. Dacă o proprietate P(n) (depinzând de un număr natural n) este adevărată pentru o valoare particulară k a lui n (deci P(k) adevărată) şi dacă pentru orice număr arbitrar n ≥ k este adevărată implicația logică: „P(n) ⇒ P(n+1)”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n ≥ k (pentru k=0 obținem Teorema 6.2.1).

Teorema 6.2.3. Dacă P(n) este o proprietate ce depinde de numărul natural n iar P(n) este adevărată pentru o valoare particulară k a lui n şi dacă pentru orice număr natural n $\geq$ k este adevărată implicaţia logică: „P(m) adevărată, pentru orice m = k, k+1, …, n-1 $\Rightarrow$ P(n) adevărată”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n $\geq$ k.

Teorema 6.2.4. Dacă o proprietate P(n) este adevărată pentru p valori consecutive particulare ale lui n: n = k, k+1, …, k+p-1, (k, p $\in \mathbb{N}$) şi dacă pentru orice număr arbitrar n $\geq$ k este adevărată implicaţia logică: „P(n) $\Rightarrow$P(n+p)”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n $\geq$ k.

Demonstraţia Teoremei 6.2.1 (ca şi a celorlalte variante de mai sus) ţine de însăşi construţia mulţimii numerelor naturale prezentată în paragraful 1.1 de la Capitolul 1.

Aplicaţii.

1. Să se demonstreze că dacă m şi n sunt numere naturale nenule (m $\geq$ n), atunci numărul soluţiilor naturale de componente nenule ale ecuaţiei $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ este C_{m-1}^{n-1}.

Soluţie. Vom demonstra prin inducţie matematică relativ la n.

Fie $N_n(m)$ numărul căutat. Evident $N_1(m) = 1 = C_{m-1}^{1-1}$.

Să presupunem că $N_k(m) = C_{m-1}^{k-1}$, pentru k = 1, 2, …, n-1 şi să demonstrăm că $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$. Evident $N_n(m) = N_{n-1}(m-1) + N_{n-1}(m-2) +…+ N_{n-1}(n-1) = C_{m-2}^{n-2} + C_{m-3}^{n-2} +…+ C_{n-2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}$. Conform principiului inducţiei matematice, $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$, pentru orice n $\in \mathbb{N}$.

2. Să se demonstreze că orice orice număr natural n se poate scrie sub forma n = =m+3q cu m, q $\in \mathbb{N}$.

Soluţie. Pentru n natural să notăm cu P(n) proprietatea din enunţ.

Vom proba că P(4), P(5) şi P(6) sunt adevărate.

Într–adevăr, $4 = 1 + 3 \cdot 1$ (m = 1, q = 1); $5 = 2 + 3 \cdot 1$ (m = 2, q = 1); $6 = 0 + 3 \cdot 2$ (m = 0, q = 2) . Să arătăm acum că este adevărată implicaţia logică: „P(n) $\Rightarrow$ P(n+3)”, şi atunci P(n) va fi adevărată pentru orice n $\geq$ 4, ţinând cont de varianta generalizată a inducţiei matematice.

Într-adevăr, din n = m+3q rezultă n+3 = m+3(q+1).

Observaţie. Problema se mai poate soluţiona şi ţinând cont de teorema împărţirii cu rest.

3. Să se demonstreze că orice număr natural n $\geq$ 1 admite o reprezentare de forma $n = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_{n_1} \cdot {n_1}^2$, unde $a_i \in \{-1, +1\}$ pentru orice i = 1, 2, …, n_1 ($n_1 \in \mathbb{N}$, nu depinde de n).

Soluţie. Să demonstrăm la început că dacă notăm prin P(n) proprietatea cerută de enunţul problemei, atunci P(1), P(2), P(3) şi P(4) sunt adevărate.

Într-adevăr, pentru n = 1 avem $1=1 \cdot 1^2$, cu $a_1 = 1$;

pentru n = 2 avem $2 = (-1) \cdot 1^2 +(-1) \cdot 2^2 +(-1) \cdot 3^2 +1 \cdot 4^2$ cu $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$;

pentru n = 3 avem $3 = (-1) \cdot 1^2 +1 \cdot 2^2$ cu $a_1 = -1$, $a_2 = 1$;

pentru n = 4 avem $4 = (-1)\cdot 1^2 + (-1)\cdot 2^2 + 1\cdot 3^2$ cu $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$.

Să presupunem acum că P(n) este adevărată pentru o valoare oarecare a lui n şi să demonstrăm că este adevărată şi P(n+4).

Pentru aceasta vom ţine cont de identitatea:

$$(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2 = 4.$$

Astfel, dacă $n = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cdot i^2$, cu $a_i \in \{-1, +1\}$, atunci

$$n+4 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cdot i^2 + (n_1+1)^2 - (n_1+2)^2 - (n_1+3)^2 + (n_1+4)^2 = \sum_{i=1}^{n_1+4} a_i \cdot i^2,$$

cu $a_{n_1+1} = 1, a_{n_1+2} = -1, a_{n_1+3} = -1, a_{n_1+4} = 1.$

Conform principiului inducţiei matematice generalizate, P(n) va fi adevărată pentru orice număr natural $n \geq 1$.

4. Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul $E_n = (n+1)(n+2)\ldots(n+n)$ se divide prin 2^n dar nu se divide prin 2^{n+1}.

Soluţie. Fie P(n) proprietatea din enunţul exerciţiului.

Vom demonstra că P(1) şi P(2) sunt adevărate şi că pentru orice număr natural n este adevărată implicaţia logică: „$P(n) \Rightarrow P(n+2)$”.

Avem $E_1=2$ şi evident $2 | E_1$ dar $2^2 = 4 \nmid E_1$; $E_2=12$ şi evident $2^2 = 4 | E_2$ dar $2^3 = 8 \nmid E_2$. Să presupunem acum că pentru un număr natural n, P(n) este adevărată, adică $2^n | E_n$ dar $2^{n+1} \nmid E_n$. Deci $E_n = 2^n \cdot p$, cu p impar. Atunci

$E_{n+2}=(n+3)(n+4)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)=$
$=4(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+3)=$
$=2^2E_n(2n+1)(2n+3)=2^2 \cdot 2^n \cdot p \cdot (2n+1)(2n+3)=2^{n+2}p(2n+1)(2n+3)=2^{n+2} \cdot p',$

unde $p'= p(2n+1)(2n+3)$. Cum p' este impar rezultă că $2^{n+2} | E_{n+2}$ şi $2^{n+3} \nmid E_{n+2}$, adică P(n+2) este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, P(n) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5. Să se demonstreze că dacă $a_1,\ldots,a_n$ sunt numere reale pozitive, atunci :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \text{(cu egalitate când numerele sunt egale).}$$

Se cunosc mai multe soluţii pentru această inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea mediilor*.

În cele ce urmează vom preznta două soluţii folosind principiul inducţiei matematice.

Soluţia 1. Pentru n = 1, 2 inegalitatea se verifică.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru n-i numere pozitive (i = 1, 2, …, n-1) şi să demonstrăm că ea rămâne adevărată şi pentru n numere pozitive $a_1,\ldots,a_n$.

Conform ipotezei de inducţie putem scrie $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$

şi $$a_n + \underbrace{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}_{de\ (n-2)\ ori} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_n (\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n})^{n-2}}.$$

Adunând cele două inegalităţi membru cu membru obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq (n-1)[\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{a_n (\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n})^{n-2}}].$$

Însă

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2...a_{n-1}}+\sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n})^{n-2}}\geq 2\sqrt{\sqrt[n-1]{a_1a_2...a_{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n})^{n-2}}}=2\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\ ,$$

astfel că $\sum_{i=1}^{n} a_i+(n-2)\cdot\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\geq 2\cdot(n-1)\cdot\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i\geq n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Soluția 2. Se demonstrează destul de uşor că inegalitatea este adevărată pentru un număr n de forma 2^k ($k\in\mathbb{N}$), folosind inducția matematică după k .

Fie acum $n\in\mathbb{N}$ iar k cel mai mic număr natural pentru care $n\leq 2^k$.

Numerele $a_1, a_2,..., a_n,\ \underbrace{g,...,g}_{de\ 2^k-n\ ori}$, unde $g=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ sunt pozitive şi în număr de 2^k.

Putem scrie deci $\frac{a_1+a_2+...+a_n+(2^k-n)g}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{a_1a_2...a_ng^{2^k-n}}$.

Însă $a_1a_2...a_ng^{2^k-n}=g^n\cdot g^{2^k-n}=g^{2^k}$.

Obținem deci inegalitatea $\frac{a_1+a_2+...+a_n+(2^k-n)g}{2^k}\geq g$, care este echivalentă în final cu $a_1+a_2+...+a_n\geq n\cdot g=n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

6.3. Principiul includerii şi excuderii

Vom prezenta în continuare un rezultat cunoscut sub numele de *principiul includerii şi excluderii*:

Teorema 6.3.1. Fie M o mulțime finită iar $M_1, M_2, ..., M_n$ submulțimi ale lui M. Dacă pentru o mulțime M notăm prin |M| cardinalul său, atunci :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}M_i\right|=\sum_{1\leq i\leq n}|M_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}\left|M_i\cap M_j\right|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\left|M_i\cap M_j\cap M_k\right|-....+(-1)^{n-1}|M_1\cap...\cap M_n|\ .$$

Demonstrație. Facem inducție matematică după n. Pentru n=1 egalitatea din enunț se reduce la $|M_1|=|M_1|$, ceea ce este evident. Pentru n=2 trebuie demonstrată egalitatea :

(1) $|M_1\cup M_2|=|M_1|+|M_2|-|M_1\cap M_2|$

care de asemenea este adevărată, deoarece elementele din $M_1\cap M_2$ apar atât la M_1 cât şi la M_2.

Presupunem egalitatea din enunț adevărată pentru oricare m submulțimi ale lui M cu m<n şi o să o demonstrăm pentru n submulțimi $M_1, M_2, ..., M_n$.

Dacă notăm $N=\bigcup_{i=1}^{n-1}M_i$, atunci conform relației (1) putem scrie:

(2) $\left|\bigcup_{i=1}^{n}M_i\right|=|N\cup M_n|=|N|+|M_n|-|N\cap M_n|$.

Însă $N\cap M_n=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}M_i\right)\cap M_n=\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)$, deci aplicând ipoteza de inducție pentru $\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)$ şi ținând seama de faptul că $(M_i\cap M_n)\cap(M_j\cap M_n)=(M_i\cap M_j)\cap M_n$, $(M_i\cap M_n)\cap(M_j\cap M_n)\cap(M_k\cap M_n)=(M_i\cap M_j\cap M_k)\cap M_n$, etc, obținem:

$$|N\cap M_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i \cap M_n)\right| = \sum_{i=1}^{n-1}|M_i \cap M_n| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i \cap M_j \cap M_n| +$$
$$(3) \qquad + \sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_n| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|.$$

Aplicând ipoteza de inducție și pentru |N| obținem:

$$(4) \quad |N| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n-1}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i \cap M_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i \cap M_j \cap M_k| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|,$$

astfel că ținând cont de (3) și (4) relația (2) devine:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = |N| + |M_n| - |N\cap M_n| = \left(\sum_{i=1}^{n-1}|M_i| + |M_n|\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i \cap M_j| + \sum_{i=1}^{n-1}|M_i \cap M_n|\right) +$$
$$+\left(\sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i \cap M_j \cap M_k| + \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i \cap M_j \cap M_n|\right) - ... +$$
$$+\left[(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|\right] - (-1)^{n-3}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{n-2}\le n-1}|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap .... \cap M_{i_{n-2}} \cap M_n| -$$
$$-(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|M_i \cap M_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|M_i \cap M_j \cap M_k| - ... + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|.$$

Conform principiului inducției matematice, egalitatea din enunț este adevărată pentru orice număr natural n nenul. ■

Aplicație.

Câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5?

Soluție. Fie A = {2n : n∈ℕ, 2n ≤ 1000}, B = {3n : n∈ℕ, 3n ≤ 1000} și C = {5n : n∈ℕ, 5n ≤ 1000}.

Se observă că A∩B = {6n : n∈ℕ, 6n ≤ 1000},

A∩C = {10n : n∈ℕ, 10n ≤ 1000},

B∩C = {15n : n∈ℕ, 15n ≤ 1000},

A∩B∩C = {30n : n∈ℕ, 30n ≤ 1000}.

Evident numărul căutat este $|A\cup B\cup C|$. Aplicând principiul includerii și excluderii pentru n = 3, avem $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| =$

$$= \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{6}\right] - \left[\frac{1000}{10}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] =$$

=500+333+200-166-100-66+33=734.

Mai multe aplicații se găsesc la capitolul de probleme propuse.

Capitolul 7

CLASE DE FUNCȚII

7.1. Relații funcționale. Funcții injective (surjective, bijective)

Definiția 7.1.1. Fie A şi B două mulțimi. O submulțime $R \subseteq A \times B$ se numeşte *relație funcțională* dacă :

(i) Pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in R$

(ii) $(a, b), (a, b') \in R \Rightarrow b = b'$.

Numim *funcție* (sau *aplicație*) un triplet f = (A, B, R) unde A şi B sunt două mulțimi nevide iar $R \subseteq A \times B$ este o relație funcțională.

În acest caz, pentru fiecare element $a \in A$ există un unic element $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in R$. Convenim să notăm b=f(a) ; elementul b se va numi *imaginea lui a* prin f. Mulțimea A se numeşte *domeniul (*sau *domeniul de definiție* al lui f) iar B se numeşte *codomeniul* lui f şi spunem de obicei că f este o funcție definită pe A cu valori în B scriind lucrul acesta prin $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Relația funcțională R se mai numeşte şi *graficul* lui f (convenim să notăm pe R prin G_f, astfel că $G_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$. Dacă $f : A \to B$ şi $f' : A' \to B'$ sunt două funcții, vom spune că ele sunt *egale* (şi vom scrie $f = f'$) dacă $A = A'$, $B = B'$ şi $f(a) = f'(a)$ pentru orice $a \in A$. Pentru o mulțime A, funcția $1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$ poartă numele de *funcția identică a lui A* (în particular, putem vorbi de funcția identică a mulțimii vide $1_\varnothing$). Dacă $A=\varnothing$ atunci există o unică funcție $f : \varnothing \to B$ (este de fapt incluziunea lui $\varnothing$ în B). Dacă $A \neq \varnothing$ şi $B = \varnothing$ atunci în mod evident nu există nici o funcție de la A la B.

Dacă $f : A \to B$ este o funcție iar $A' \subseteq A$ şi $B' \subseteq B$ atunci notăm:

$$f(A')=\{f(a) : a \in A'\} \text{ şi } f^{-1}(B')=\{a \in A : f(a) \in B'\}$$

($f(A')$ se va numi *imaginea* lui A′ prin f iar $f^{-1}(B')$ *contraimaginea* lui B′ prin f).

În particular, notăm **Im**(f)=f (A). Evident, $f(\varnothing)=\varnothing$ şi $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

Definiția 7.1.2. Fiind date două funcții $f:A \to B$ şi $g:B \to C$ numim *compunerea* lor funcția notată $g \circ f : A \to C$ şi definită prin $(g \circ f)(a)=g(f(a))$ pentru orice $a \in A$.

Propoziția7.1.3. Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ sunt trei funcții, atunci:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(ii) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Demonstrație. (i). Într-adevăr, avem că $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au pe A drept domeniu de definiție, pe D codomeniu şi pentru orice $a \in A$, $(h \circ (g \circ f))(a)=((h \circ g) \circ f)(a)=h(g(f(a)))$.

(ii). Evident. ∎

Propoziția 7.1.4. Fie $f : A \to B$, A', $A'' \subseteq A$, B', $B'' \subseteq B$, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ două familii de submulțimi ale lui A şi respectiv B. Atunci:

(i) $A' \subseteq A'' \Rightarrow f(A') \subseteq f(A'')$;

(ii) $B' \subseteq B'' \Rightarrow f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$;

(iii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

(iv) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(v) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(vi) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Demonstrație (i). Dacă $b\in f(A')$, atunci $b=f(a)$ cu $a\in A'$ şi cum $A' \subseteq A''$ deducem că $b\in f(A'')$, adică $f(A')\subseteq f(A'')$.

(ii). Analog cu (i).

(iii). Deoarece pentru orice $k\in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$, conform cu (i) deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq f(A_k)$ şi cum k este oarecare deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

(iv). Egalitatea cerută rezultă imediat din echivalențele : $b\in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow$ există $a\in \bigcup_{i\in I} A_i$ astfel încât $b=f(a) \Leftrightarrow$ există $i_0\in I$ astfel încât $a\in A_{i_0}$ şi $b=f(a) \Leftrightarrow$ există $i_0\in I$ astfel încât $b\in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow b\in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(v). Totul rezultă din echivalențele $a\in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(a)\in \bigcap_{j\in J} B_j \Leftrightarrow$ pentru orice $j\in J$, $f(a)\in B_j \Leftrightarrow$ pentru orice $j\in J$, $a\in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow a\in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(vi). Analog cu (iv). ■

Definiția 7.1.5. Despre o funcție $f : A\to B$ vom spune că este:

(i) *injectivă,* dacă pentru orice $a, a'\in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ (echivalent cu $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$) ;

(ii) *surjectivă,* dacă pentru orice $b\in B$, există $a\in A$ astfel încât $b=f(a)$;

(iii) *bijectivă,* dacă este simultan injectivă şi surjectivă.

Dacă $f : A\to B$ este bijectivă, funcția $f^{-1}:B\to A$ definită prin echivalența $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow b=f(a)$ ($b\in B$ şi $a\in A$) poartă numele de *inversa* lui f.

Se verifică imediat că $f^{-1}\circ f=1_A$ şi $f\circ f^{-1}=1_B$.

Propoziția 7.1.6. Fie $f : A\to B$ şi $g : B\to C$ două funcții.

(i) Dacă f şi g sunt injective (surjective, bijective) atunci $g\circ f$ este injectivă (surjectivă, bijectivă ; în acest ultim caz $(g\circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$) ;

(ii) Dacă $g\circ f$ este injectivă (surjectivă, bijectivă) atunci f este injectivă, (g este surjectivă; f este injectivă şi g este surjectivă).

Demonstrație. (i). Fie a, $a' \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a)=(g \circ f)(a')$. Atunci $g(f(a))=g(f(a'))$ şi cum g este injectivă deducem că $f(a)=f(a')$ iar cum şi f este injectivă deducem că $a=a'$, adică $g \circ f$ este injectivă.

Să presupunem acum că f şi g sunt surjective şi fie $c \in C$; cum g este surjectivă, $c=g(b)$ cu $b \in B$ şi cum şi f este surjectivă $b=f(a)$ cu $a \in A$ astfel că $c=g(b)=g(f(a))=(g \circ f)(a)$, adică $g \circ f$ este surjectivă.

Dacă f şi g sunt bijective atunci faptul că $g \circ f$ este bijectivă rezultă imediat din cele expuse mai sus. Pentru a proba în acest caz egalitatea $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, fie $c \in C$. Avem că $c=g(b)$ cu $b \in B$ şi $b=f(a)$ cu $a \in A$. Deoarece $(g \circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$ deducem că $(g \circ f)^{-1}(c) = a = f^{-1}(b) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$, adică $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(ii). Să presupunem că $g \circ f$ este injectivă şi fie a, $a' \in A$ astfel încât $f(a)=f(a')$. Atunci $g(f(a))=g(f(a')) \Leftrightarrow (g \circ f)(a)=(g \circ f)(a') \Rightarrow a=a'$, adică f este injectivă.

Dacă $g \circ f$ este surjectivă, pentru $c \in C$, există $a \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a) = c \Leftrightarrow g(f(a)) = c$, adică g este surjecție.

Dacă $g \circ f$ este bijecție atunci în particular $g \circ f$ este injecție şi surjecție, deci conform celor de mai sus cu necesitate f este injecție iar g surjecție. ■

Propoziția 7.1.7. Fie M şi N două mulțimi iar $f : M \to N$ o funcție. Între mulțimile P(M) şi P(N) se definesc funcțiile $f_* : P(M) \to P(N)$, $f^* : P(N) \to P(M)$ prin $f_*(A) = f(A)$, $A \in P(M)$ şi $f^*(B) = f^{-1}(B)$, $B \in P(N)$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă ;

(ii) f_* este injectivă ;

(iii) $f^* \circ f_* = 1_{P(M)}$;

(iv) f^* este surjectivă ;

(v) $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$, pentru orice A, $B \in P(M)$;

(vi) $f(\complement_M A) \subseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(vii) Dacă g, h : $L \to M$ sunt două funcții astfel încât $f \circ g = f \circ h$, atunci g=h ;

(viii) Există o funcție $g : N \to M$ astfel încât $g \circ f = 1_M$.

Demonstrație. Vom demonstra echivalența afirmațiilor astfel:

(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi)⇒(vii)⇒(i) iar apoi (i)⇔(viii) .

(i)⇒(ii). Fie A, $A' \in P(M)$ astfel încât $f_*(A)=f_*(A') \Leftrightarrow f(A)=f(A')$.

Dacă $x \in A$, atunci $f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in f(A') \Rightarrow$ există $x' \in A'$ astfel încât $f(x)=f(x')$. Cum f este injectivă, rezultă $x = x' \in A'$, adică $A \subseteq A'$; analog $A' \subseteq A$, deci $A=A'$, adică f_* este injectivă.

(ii)⇒(iii). Pentru $A \in P(M)$ trebuie demonstrat că $(f^* \circ f_*)(A) = A \Leftrightarrow f^{-1}\ f(A)) = A$. Incluziunea $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ este valabilă pentru orice funcție f. Pentru cealaltă incluziune, dacă $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow$ există $x' \in A$ astfel încât $f(x)=f(x') \Rightarrow f_*(\{x\})=f_*(\{x'\}) \Rightarrow \{x\}=\{x'\} \Rightarrow x = x' \in A$, adică $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

(iii)⇒(iv). Deoarece $f^* \circ f_* = 1_{P(M)}$, pentru orice $A \in P(M)$, $f^*(f_*(A)) = A$, deci notând $B = f_*(A) \in P(N)$ avem că $f^*(B) = A$, adică f^* este surjectivă.

(iv)⇒(v). Fie A, $B \in P(M)$ şi A', $B' \in P(N)$ astfel încât $A=f^{-1}(A')$ şi $B=f^{-1}(B')$. Atunci $f(A \cap B)=f(f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f(f^{-1}(A' \cap B')$.

Să arătăm că $f(f^{-1}(A')) \cap f(f^{-1}(B')) \subseteq f(f^{-1}(A' \cap B'))$.

Dacă $y\in f(f^{-1}(A'))\cap f(f^{-1}(B')) \Rightarrow y\in f(f^{-1}(A'))$ şi $y\in f(f^{-1}(B')) \Rightarrow$ există $x'\in f^{-1}(A')$ şi $x''\in f^{-1}(B')$ astfel încât $y = f(x') = f(x'')$.

Cum $x'\in f^{-1}(A')$ şi $x''\in f^{-1}(B') \Rightarrow f(x')\in A'$ şi $f(x'')\in B'$, deci $y\in A'\cap B'$. Deoarece $y=f(x')\Rightarrow x'\in f^{-1}(A'\cap B')$, adică $y\in f(f^{-1}(A'\cap B'))$.

Astfel, $f(A\cap B)\supseteq f(A)\cap f(B)$ şi cum incluziunea $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ este adevărată pentru orice funcţie deducem că $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(v)⇒(vi). Pentru $A\in P(M)$ avem $f(A)\cap f(\complement_M A)=f(A\cap \complement_M A)=f(\emptyset)=\emptyset$, deci $f(\complement_M A)\subseteq \complement_N f(A)$.

(vi)⇒(vii). Fie $g, h : L\to M$ două funcţii astfel încât $f\circ g=f\circ h$ şi să presupunem prin absurd că există $x\in L$ astfel încât $g(x)\neq h(x)$, adică $g(x)\in \complement_M\{h(x)\}$; atunci $f(g(x))\in f(\complement_M\{h(x)\})\subseteq \complement_N f(h(\{x\}))=\complement_N\{f(h(x))\}$ deci $f(g(x))\neq f(h(x)) \Leftrightarrow (f\circ g)(x)\neq(f\circ h)(x) \Leftrightarrow f\circ g\neq f\circ h$, ceea ce este absurd.

(vii)⇒(i). Fie $x, x'\in M$ astfel încât $f(x)=f(x')$ şi să presupunem prin absurd că $x \neq x'$. Notând $L=\{x, x'\}$ şi definind $g, h : L\to M$, $g(x)=x$, $g(x')=x'$, $h(x)=x'$, $h(x')=x$, atunci $g\neq h$ şi totuşi $f\circ g=f\circ h$, ceea ce este absurd.

(i)⇒(viii). Definind $g:N\to M$, $g(y)=x$ dacă $y=f(x)$ cu $x\in M$ şi y_0 dacă $y\notin f(M)$, atunci datorită injectivităţii lui f, g este definită corect şi evident $g\circ f=1_M$.

(viii)⇒(i). Dacă $x, x'\in M$ şi $f(x)=f(x')$, atunci $g(f(x))=g(f(x'))\Rightarrow x=x'$, adică f este injectivă. ■

Propoziţia 7.1.8. Cu notaţiile de la propoziţia precedentă, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este surjectivă ;

(ii) f_* este surjectivă ;

(iii) $f_*\circ f^*=1_{P(N)}$;

(iv) f^* este injectivă ;

(v) $f(\complement_M A)\supseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A\in P(M)$;

(vi) Dacă $g, h : N\to P$ sunt două funcţii astfel încât $g\circ f=h\circ f$, atunci $g=h$;

(vii) Există o funcţie $g : N\to M$ astfel încât $f\circ g=1_N$.

Demonstraţie. Vom demonstra echivalenţa afirmaţiilor astfel:

(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi)⇒(i) iar apoi (i)⇔(vii).

(i)⇒(ii). Fie $B\in P(N)$ şi $y\in B$; atunci există $x_y\in M$ astfel încât $f(x_y)=y$.

Notând $A=\{x_y : y\in B\}\subseteq M$ avem că $f(A)=B \Leftrightarrow f_*(A)=B$.

(ii)⇒(iii). Avem de demonstrat că pentru orice $B\in P(N)$, $f(f^{-1}(B))=B$. Incluziunea $f(f^{-1}(B))\subseteq B$ este valabilă pentru orice funcţie f. Fie acum $y\in B$; cum f_* este surjectivă, există $A\subseteq M$ astfel încât $f_*(A)=\{y\}\Leftrightarrow f(A)=\{y\}$, deci există $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$ şi deoarece $y\in B\Rightarrow x\in f^{-1}(B)\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, de unde şi incluziunea $B\subseteq f(f^{-1}(B))$.

(iii)⇒(iv). Dacă $B_1, B_2\in P(N)$ şi $f^*(B_1)=f^*(B_2)$, atunci $f_*(f^*(B_1)) = f_*(f^*(B_2)) \Leftrightarrow 1_{P(N)}(B_1) =1_{P(N)}(B_2)\Leftrightarrow B_1=B_2$, adică f^* este injectivă.

(iv)⇒(v). Fie $A\subseteq M$; a arăta că $f(\complement_M A)\supseteq \complement_N f(A)$, revine la $f(\complement_M A)\cup f(A)=N \Leftrightarrow f(\complement_M A\cup A) = N\Leftrightarrow f(M) = N$. Să presupunem prin absurd că există $y_0\in N$ astfel încât pentru orice $x\in M$, $f(x)\neq y_0$, adică $f^{-1}(\{y_0\})=\emptyset\Leftrightarrow f^*(\{y_0\})=\emptyset$. Deoarece şi $f^*(\emptyset)=\emptyset$ ⇒

$f^*(\{y_0\})=f^*(\emptyset)$ iar pentru că f^* este presupusă injectivă ar rezulta că $\{y_0\}=\emptyset$, ceea ce este absurd.

(v)⇒(vi). În particular, pentru A=M avem $f(\complement_M M)\supseteq\complement_N f(M) \Leftrightarrow f(\emptyset)\supseteq\complement_N f(M)\Leftrightarrow$ $\emptyset\supseteq\complement_N f(M)\Leftrightarrow f(M)=N$.

Dacă g, h : N→P sunt două funcții astfel încât $g\circ f=h\circ f$, atunci pentru orice $y\in N$, există $x\in M$ astfel încât $f(x)=y$ (căci $f(M)=N$) şi astfel $g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = (h\circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$, adică g=h.

(vi)⇒(i). Presupunem prin absurd că există $y_0\in N$ astfel încât $f(x) \neq y_0$, pentru orice $x\in M$. Definim g, h : N→{0, 1} astfel : g(y)=0, pentru orice $y\in N$ şi

$$h(y)=\begin{cases}0, & pentru\ \ y\in N-\{y_0\}\\ 1, & pentru\ \ y=y_0\end{cases}$$

Evident $g \neq h$ şi totuşi $g\circ f=h\circ f$, ceea ce este absurd, deci f este surjectivă.

(i)⇒(vii). Pentru fiecare $y\in N$ alegând câte un singur $x_y\in f^{-1}(\{y\})$, obținem astfel o funcție g : N→M, $g(y)=x_y$, pentru orice $y\in N$, ce verifică în mod evident relația $f\circ g=1_N$.

(vii)⇒(i). Pentru $y\in N$, scriind că $f(g(y))=y$, rezultă $y=f(x)$, cu $x=g(y)\in M$, adică f este surjectivă.■

Din propozițiile precedente obținem imediat:

Corolarul 7.1.9. Cu notațiile de la Propoziția 7.1.7, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este bijectivă ;

(ii) $f(\complement_M A)=\complement_N f(A)$, pentru orice $A\in P(M)$;

(iii) f_* şi f^* sunt bijective ;

(iv) Există o funcție g : N→M astfel încât $f\circ g = 1_N$ şi $g\circ f = 1_M$.

Propoziția 7.1.10. Fie M o mulțime finită şi f:M→M o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă ;

(ii) f este surjectivă ;

(iii) f este bijectivă .

Demonstrație. Vom demonstra următoarele implicații: (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii). Dacă f este injectivă, atunci f(M) şi M au acelaşi număr de elemente şi cum $f(M)\subseteq M$ rezultă că $f(M)=M$, adică f este şi surjectivă.

(ii)⇒(iii). Dacă f este surjectivă, atunci pentru orice element $y\in M$ va exista un unic element $x_y\in M$ astfel încât $f(x_y) = y$ (căci în caz contrar ar rezulta contradicția că M ar avea mai multe elemente decât M), adică f este şi injectivă.

(iii)⇒(i). Evident. ■

Propoziția 7.1.11. Fie M şi N două mulțimi având m, respectiv n elemente. Atunci:

(i) Numărul funcțiilor definite pe M cu valori în N este egal cu n^m ;

(ii) Dacă m = n, atunci numărul funcțiilor bijective de la M la N este egal cu m! ;

(iii) Dacă $m \leq n$, atunci numărul funcțiilor injective de la M la N este egal cu A_n^m ;

(iv) Dacă m ≥ n, atunci numărul funcțiilor surjective de la M la N este egal cu

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Demonstrație. (i). Facem inducție matematică după m; dacă m=1, mulțimea M va avea un singur element şi este clar că vom avea $n = n^1$ funcții de la M la N. Presupunem afirmația adevărată pentru mulțimile M ce au cel mult m-1 elemente.

Dacă M este o mulțime cu m elemente, putem scrie $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M' submulțime a lui M cu m-1 elemente.

Pentru orice $y\in N$ şi $g : M'\to N$ funcție, considerând $f_{g,y} : M\to N$, $f_{g,y}(x) = g(x)$ dacă $x\in M'$ şi y dacă $x=x_0$, deducem că oricărei funcții $g: M'\to N$ îi putem asocia n funcții distincte de la M la N ale căror restricții la M' sunt egale cu g. Aplicând ipoteza de inducție pentru funcțiile de la M' la N, deducem că de la M la N se pot defini $n\cdot n^{m-1}=n^m$ funcții.

(ii). Facem inducție matematică după m; dacă m =1, mulțimile M şi N vor avea câte un singur element şi vom avea o singură funcție bijectivă de la M la N.

Presupunem afirmația adevărată pentru toate mulțimile M' şi N' ambele având cel mult m-1 elemente şi fie M şi N mulțimi având fiecare câte m elemente. Scriind $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M' submulțime a lui M cu m-1 elemente, atunci orice funcție bijectivă $f : M\to N$ este perfect determinată de valoarea $f(x_0)\in N$ precum şi de o funcție bijectivă $g : M'\to N'$, unde $N' = N \setminus \{f(x_0)\}$. Deoarece pe $f(x_0)$ îl putem alege în m moduri iar pe g în (m-1)! moduri (conform ipotezei de inducție) deducem că de la M la N putem defini $(m-1)!\cdot m =m!$ funcții bijective.

(iii). Dacă $f : M\to N$ este injectivă, atunci luând drept codomeniu pe $f(M)\subseteq N$, deducem că f determină o funcție bijectivă $\overline{f} :M\to f(M)$, $\overline{f}(x) = f(x)$, pentru orice $x\in M$, iar f(M) are m elemente. Reciproc, dacă vom alege în N o parte N' a sa cu m elemente, atunci putem stabili m! funcții bijective de la M la N' (conform cu (ii)). Cum numărul submulțimilor N' ale lui N care au m elemente este egal cu C_n^m, rezultă că putem construi $m!\cdot C_n^m = A_n^m$ funcții injective de la M la N.

(iv). Să considerăm $M=\{x_1, x_2, ...,x_m\}$, $N=\{y_1, y_2, ...,y_n\}$ iar M_i mulțimea funcțiilor de la M la N astfel încât y_i nu este imaginea nici unui element din M, i = 1, 2, ..., n.

Astfel, dacă notăm prin F_m^n mulțimea funcțiilor de la M la N, mulțimea funcțiilor surjective S_m^n de la M la N va fi complementara mulțimii $M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$ din F_m^n, deci conform Principiului includerii şi excluderii (vezi Teorema 6.3.1) avem egalitățile :

$$(1)\quad \begin{aligned} \left|S_m^n\right| &= \left|F_m^n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \sum_{i=1}^n \left|M_i\right| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|M_i\cap M_j\right| - \\ &- \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|M_i\bigcap M_j\bigcap M_k\right| + ... + (-1)^n\left|M_1\bigcap M_2\bigcap ....\bigcap M_n\right| \end{aligned}$$

Deoarece M_i este de fapt mulțimea funcțiilor definte pe M cu valori în $N \setminus \{y_i\}$, $M_i\cap M_j$ este mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în $N \setminus \{y_i , y_j\}$ ..., etc, conform punctului (i) avem că:

$$(2)\quad |M_i|=(n-1)^m,\ |M_i\cap M_j|=(n-2)^m,\ ...,\ etc,$$

($|M_1\cap M_2 \cap...\cap M_n|=0$, deoarece $M_1\cap M_2 \cap...\cap M_n=\emptyset$).

Deoarece sumele ce apar în (1) au, respectiv, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n temeni egali, ținând cont de acest lucru şi de (2), relația (1) devine:

$$S_m^n = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Pentru o mulțime nevidă M şi $A \in P(M)$ definim $\varphi_A : M \to \{0,1\}$,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & dacă\ x \notin A \\ 1, & dacă\ x \in A \end{cases}$$

pentru orice $x \in M$. Funcția φ_A poartă numele de *funcția caracteristică* a mulțimii A.

Propoziția 7.1.12. Dacă A, $B \in P(M)$, atunci:

(i) $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$;

(ii) $\varphi_\emptyset = 0$, $\varphi_M = 1$;

(iii) $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_A^2 = \varphi_A$;

(iv) $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$;

(v) $\varphi_{A \setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_{C_M A} = 1 - \varphi_A$;

(vi) $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B$.

Demonstrație. (i).„$\Rightarrow$''. Evident.

„$\Leftarrow$''. Presupunem că $\varphi_A = \varphi_B$ şi fie $x \in A$; atunci $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 1$, deci $x \in B$, adică $A \subseteq B$. Analog $B \subseteq A$, de unde $A = B$.

(ii). Evident.

(iii). Pentru $x \in M$ putem avea următoarele situații: ($x \notin A$, $x \notin B$) sau ($x \in A$, $x \notin B$) sau ($x \notin A$, $x \in B$) sau ($x \in A$, $x \in B$). În fiecare situație în parte se verifică imediat relația $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

Cum $A \cap A = A \Rightarrow \varphi_A = \varphi_A \varphi_A = \varphi_A^2$.

(iv), (v). Asemănător cu (iii).

(vi). Avem $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = \varphi_{A \setminus B} + \varphi_{B \setminus A} - \varphi_{A \setminus B}\varphi_{B \setminus A} =$

$$= \varphi_A - \varphi_A\varphi_B + \varphi_B - \varphi_B\varphi_A - \varphi_{(A \setminus B) \cap (B \setminus A)} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B$$

deoarece $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. ■

Fie M o mulțime oarecare iar $\rho \in$ **Echiv** (M). Funcția $p_{\rho,M} : M \to M/\rho$ definită prin $p_{\rho,M}(x) = [x]_\rho$ pentru orice $x \in M$ este surjectivă şi poartă numele de *surjecția canonică*.

Propoziția 7.1.13. Fie M şi N două mulțimi pe care s-au definit relațiile de echivalență ρ, respectiv ρ' şi $f : M \to N$ o funcție având proprietatea:

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho', \text{ pentru orice } x, y \in M.$$

Atunci există o singură funcție $\overline{f} : M/\rho \to N/\rho'$ astfel încât diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{M,\rho}"'] & N \arrow[d, "p_{N,\rho'}"] \\ M/\rho \arrow[r, "\overline{f}"] & N/\rho \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $p_{N,\rho'} \circ f = \overline{f} \circ p_{M,\rho}$, unde $p_{M,\rho}$, $p_{N,\rho'}$ sunt surjecțiile canonice).

Demonstrație. Pentru x∈M, vom nota prin $[x]_\rho$ clasa de echivalență a lui x modulo relația ρ. Pentru x∈M, definim: $\overline{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$. Dacă x, y∈M astfel încât $[x]_\rho=[y]_\rho \Leftrightarrow$ $(x, y)\in\rho \Rightarrow [f(x), f(y)]\in\rho'$ (din enunț) $\Rightarrow [f(x)]_{\rho'} = [f(y)]_{\rho'}$, adică $\overline{f}$ este corect definită.

Dacă x∈M, atunci $(\overline{f}\circ p_{M,\rho})(x) = \overline{f}(p_{M,\rho}(x)) = \overline{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'} = p_{N,\rho'}(f(x)) =$ $=(p_{N,\rho'}\circ f)(x)$, adică $p_{N,\rho'}\circ f=\overline{f}\circ p_{M,\rho}$.

Pentru a demonstra unicitatea lui $\overline{f}$, să presupunem că ar mai exista o funcție $\overline{f}\,' : M/\rho\to N/\rho'$ astfel încât $p_{N,\rho'}\circ f=\overline{f}\,'\circ p_{M,\rho}$, şi fie x∈M.

Atunci $\overline{f}\,'([x]_\rho)=\overline{f}\,'(p_{M,\rho}(x))=(\overline{f}\,'\circ p_{M,\rho})(x)=(p_{N,\rho'}\circ f)(x) = p_{N,\rho'}(f(x)) = [f(x)]_{\rho'}$ $=\overline{f}\,'([x]_\rho)$, de unde deducem că $\overline{f}=\overline{f}\,'$. ■

Propoziția 7.1.14. Fie M şi N două mulțimi iar f :M→N o funcție ; notăm prin ρ_f relația binară de pe M definită astfel:

$$(x, y)\in\rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)\ \ (x, y\in M).$$

Atunci:

(i) ρ_f este relație de echivalență pe M;

(ii) Există o unică funcție bijectivă $\overline{f}$: $M/\rho_f\to \mathrm{Im}(f)$ astfel încât

$$i\circ\overline{f}\circ p_{M,\rho_f} = f,\ \ i:\mathrm{Im}(f)\to N \text{ fiind incluziunea.}$$

Demonstrație. (i). Evident (relația de egalitate fiind o echivalență pe M).

(ii). Păstrând notația claselor de echivalență de mai sus, pentru x∈M definim $\bar{f}([x]_{\rho_f})=f(x)$. Funcția $\overline{f}$ este corect definită căci dacă x, y∈M şi $[x]_{\rho_f}=[y]_{\rho_f}\Leftrightarrow$(x, y)$\in\rho_f$ ⇔ f(x)=f(y) (de aici rezultă imediat şi injectivitatea lui $\overline{f}$) . Cum $\overline{f}$ este în mod evident şi surjectivă, deducem că $\overline{f}$ este bijectivă. Pentru a proba unicitatea lui $\overline{f}$, fie $f_1 : M/\rho_f\to\mathrm{Im}(f)$ o altă funcție bijectivă astfel încât $i\circ f_1\circ p_{M,\rho_f} = f$ şi x∈M. Atunci, $(i\circ f_1\circ p_{M,\rho_f})(x)=f(x) \Leftrightarrow f_1([x]_{\rho_f})=f(x)\Leftrightarrow f_1([x]_{\rho_f})=f(x)=\bar{f}([x]_{\rho_f})$, adică $f_1=\overline{f}$ **.** ■

Propoziția 7.1.15. Fie M o mulțime finită cu m elemente. Atunci numărul $N_{m,k}$ al relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe M astfel încât mulțimea cât să aibă k elemente (k≤m) este dat de formula:

$$N_{m,k} = (1/k!)\cdot[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}].$$

Deci, numărul relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe mulțimea M este dat de formula $N=N_{m,1}+N_{m,2}+...+N_{m,m}$.

Demonstrație. Dacă ρ este o relație de echivalență, ρ∈Echiv(M), atunci avem surjecția canonică $p_{M,\rho} : M\to M/\rho$. Dacă în general, f : M→N este o funcție surjectivă, atunci cum am stabilit în cazul Propoziției 7.1.14, aceasta dă naştere la următoarea relație de echivalență de pe M : $(x, y)\in\rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Mai mult, dacă $g : N\to N'$ este o funcție bijectivă atunci relațiile ρ_f şi $\rho_{g\circ f}$ coincid căci $(x,y)\in\rho_{g\circ f} \Leftrightarrow (g\circ f)(x)=(g\circ f)(y) \Leftrightarrow$ $g(f(x))=g(f(y))\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow (x, y)\in\rho_f$. Deci, dacă N are k elemente, atunci k! funcții surjective de la M la N vor determina aceiaşi relație de echivalență pe M. Luând în particular N=M/ρ şi ținând cont de Propoziția 7.1.11 deducem că $N_{m,k} = (1/k!)\cdot[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}]$. ■

7.2. Funcții pare, impare, periodice

Fie $a\in\mathbb{R}$, $a > 0$.

Definiția 7.2.1. O funcție $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, pentru orice $x \in [-a, a]$.

Exemple. Funcția $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ este o funcție pară; de asemenea funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$ este pară ($k \in \mathbb{N}$).

Observație. Un produs finit de funcții pare este o funcție pară; de asemenea, o sumă finită de funcții pare este o funcție pară. Dacă compunem două funcții pare rezultatul este tot o funcție pară.

Definiția 7.2.2. O funcție $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, pentru orice $x \in [-a, a]$.

Exemple. Funcțiile $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) sunt funcții impare.

Observații. 1. Un produs par de funcții impare este o funcție pară, iar un produs impar de funcții impare este funcție impară;

2. O sumă finită de funcții impare este o funcție impară.

3. Dacă compunem două funcții impare obținem tot o funcție impară.

Teorema 7.2.3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție impară şi bijectivă. Atunci funcția $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este impară.

Demonstrație. Fie $y \in \mathbb{R}$. Trebuie demonstrat că $f^{-1}(-y) = - f^{-1}(y)$.

Avem, $f(f^{-1}(-y)) = -y$ iar $f(-f^{-1}(y)) = - f(f^{-1}(y)) = -y$, adică $f(f^{-1}(-y)) = f(-f^{-1}(y))$ şi deci $f^{-1}(-y) = - f^{-1}(y)$. ■

Observații. 1. Funcțiile $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sunt impare.

2. Orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se poate scrie ca suma dintre o funcție pară şi una impară (vezi Exercițiul 7.2.4.).

Definiția 7.2.4. O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există un număr real $T \neq 0$ pentru care $f(x + T) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Un astfel de număr T poartă numele de *perioadă* a funcției f. Cea mai mică perioadă strict pozitivă a funcției f, dacă există, poartă numele de *perioadă principală*.

Exemple.

Funcțiile trigonometrice sunt funcții periodice (funcțiile sinus şi cosinus au perioada principală 2π iar funcțiile tangentă şi cotangentă au perioada principală π).

Funcția $\{x\}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică şi are perioada principală egală cu 1; într-adevăr, $\{x+1\} = \{x\}$ şi 1 este cel mai mic număr cu această proprietate ($\{x\} = x - [x]$).

Observații. 1. Dacă T este perioada principală pentru f, atunci şi -T este perioadă pentru f;

2. Dacă T este perioada pentru f, atunci şi kT este perioadă pentru f, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$;

3. Dacă g este o funcție periodică iar f este o funcție oarecare, atunci $f\circ g$ este periodică; în particular, dacă compunem două funcții periodice obținem tot o funcție periodică;

4. Fie f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții periodice. Dacă f posedă o perioadă T_1 iar g o perioadă T_2 astfel încât $\frac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$ atunci $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ (când este definită) sunt funcții periodice.

Într-adevăr, putem presupune că există două numere naturale p, q astfel încât $pT_1 = qT_2$. Evident pT_1 este perioadă pentru f, iar qT_2 este perioadă pentru g, deci f şi g posedă perioade egale; atunci evident $f \pm g$, fg şi $\frac{f}{g}$ sunt periodice.

7.3. Funcții convexe (concave)

Definiția 7.3.1. Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a, b $\in$ $\mathbb{R}$, a<b. Vom spune că f este *convexă (concavă)* pe (a, b) dacă pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$ şi orice $t \in [0, 1]$ avem

$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ (respectiv, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$).

Teorema 7.3.2. Dacă f este de două ori derivabilă pe (a, b), atunci f este convexă pe (a, b) dacă şi numai dacă $f''\ge 0$ pe (a, b).

Demonstrație. Să presupunem că $f''\ge 0$ pe (a, b) şi să demonstrăm ca f este convexă pe (a, b). Atunci f' este crescătoare pe (a, b), deci pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \le x_2 \Rightarrow f'(x_1) \le f'(x_2)$.

Fie acum $t \in [0, 1]$ şi $x_0 = tx_1+(1-t)x_2$. Se observă imediat că $x_1 < x_0 < x_2$.

Conform teoremei lui Lagrange există $c_1 \in (x_1, x_0)$ şi $c_2 \in (x_0, x_2)$ astfel încât $f'(c_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ şi $f'(c_2)=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Cum $c_1 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) < f'(c_2)$, deci $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

Înlocuind la numitori x_0 prin $tx_1+(1-t)x_2$ şi grupând convenabil se ajunge la $f(x_0) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \Leftrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, adică f este convexă.

Invers, să presupunem că f este convexă pe (a, b) şi să demonstrăm că $f''\ge 0$ pe (a, b). Fie $\alpha < \beta < \gamma$ trei numere reale din domeniul de definiție al lui f.

Vom proba că $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

În relația $f(tx_1+(1-t)x_2) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ punem $x_1 = \alpha$, $x_2 = \gamma$, $t=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, deci $1-t=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$; evident $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \in [0, 1]$.

Vom obține prin înlocuire $f\left(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\gamma\right)\le\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, adică

$f\left(\frac{\gamma\alpha-\beta\alpha+\beta\gamma-\alpha\gamma}{\gamma-\alpha}\right)\le\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, sau reducând

$f(\beta)\cdot(\gamma-\alpha)\le f(\alpha)\cdot(\gamma-\beta)+f(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)$, echivalent cu

$$(*)\quad \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}.$$

Vom alege acum patru puncte $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Din cele deduse anterior scriem $\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \geq \frac{f(\alpha)-f(x_1)}{\alpha - x_1}$ şi $\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta - x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Dacă $\alpha \to x_1$ şi $\beta \to x_2$ obţinem $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, pentru că f(x) este derivabilă şi cum alegerea lui x_1 şi x_2 este arbitrară, condiţionată numai de $x_1 < x_2$ scriem $f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0$.

Împărţind cu cantitatea pozitivă $x_2 - x_1$ obţinem $\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$.

Trecând la limită $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} = f''(x_1) \geq 0$ şi afirmaţia este probată.

Observaţie. Evident, f concavă dacă şi numai dacă - f convexă; analog obţinem că f concavă pe (a, b) dacă şi numai dacă $f'' \leq 0$ pe (a, b).

Teorema 7.3.3. (Jensen). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a, b $\in \mathbb{R}$, a<b. Atunci f este convexă pe (a, b) dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Egalitate avem când $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstraţie. „$\Leftarrow$”. Evident.

„$\Rightarrow$”. Să observăm pentru început că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, atunci şi $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in (a, b)$.

Într-adevăr, avem că $a < \min\limits_{1 \leq i \leq n}\{x_i\} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{x_i\} < b$.

Să revenim acum la demonstraţia teoremei.

Dacă n = 2 totul este clar.

Fie n = 4; $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a, b)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in [0, 1]$ şi $\sum\limits_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$.

Dacă considerăm $y_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2$, $y_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} x_3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} x_4$, $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ şi $\mu_2 = \lambda_3 + \lambda_4$, atunci $f(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) \leq \mu_1 f(y_1) + \mu_2 f(y_2)$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i\right) \leq (\lambda_1+\lambda_2) f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2\right) + (\lambda_3+\lambda_4) f\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} x_3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} x_4\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i\right) \leq (\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} f(x_2)\right) +$$

$$+ (\lambda_3+\lambda_4)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} f(x_3) + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} f(x_4)\right) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f(x_i).$$

Raţionând din aproape în aproape (un fel de inducţie matematică) deducem că implicaţia „$\Rightarrow$“ este adevărată dacă n este de forma $n = 2^k$ cu $k \in \mathbb{N}$.

Fie acum n un număr natural oarecare iar k cel mai mic număr natural cu proprietatea că $n \leq 2^k$ cu $k \in \mathbb{N}$.

Considerăm

$$\mu_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{2^k - n}, & pentru\ \ j = 1,\ 2,\ ..., n \\ \dfrac{2^k - n - 1}{\left(2^k - n\right)^2}, & pentru\ \ j = n+1,\ \ n+2,\ ...,\ 2^k \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} x_j, & pentru\ \ j = 1,\ 2,\ ..., n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, & pentru\ \ j = n+1,\ \ n+2,\ ...,\ 2^k \end{cases}.$$

Avem

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \mu_j y_j\right) \le \sum_{j=1}^{2^k} \mu_j f(y_j) \Leftrightarrow \ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}{2^k - n} + \left(2^k - n\right)\left(\frac{2^k - n - 1}{\left(2^k - n\right)^2} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}{2^k - n} + \frac{2^k - n - 1}{2^k - n} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}{2^k - n} + f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) - \frac{f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)}{2^k - n} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}{2^k - n} - \frac{f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)}{2^k - n} \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,.$$

Observație. Analog deducem că f este concavă pe (a, b) dacă şi numai dacă pentru orice x_1, x_2, …., x_n $\in$ (a, b) şi λ_1, λ_2, …., λ_n $\in$ [0, 1] cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Aplicații.

1. Fie f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a, b $\in \mathbb{R}$ cu a < b iar x_1, …, x_n $\in$ (a, b). Dacă f este convexă pe (a, b) atunci $f\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \le \dfrac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$; dacă f este concavă pe (a, b) atunci $f\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \ge \dfrac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$.

Demonstrație. Totul rezultă din Teorema 7.3.3 luând $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.

2. (*Inegalitatea lui Hölder*) Fie x_1, …, x_n > 0 iar λ_1, …, λ_n $\in$ [0, 1] cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Atunci avem inegalitatea $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \ge x_1^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Demonstrație. Fie f : (0, ∞) $\to \mathbb{R}$, f(x) = ln x. Atunci $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ şi $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ pentru orice x $\in$ (0, ∞). Deci f este concavă, conform Teoremei 7.3.1, pe (0, ∞). Conform teoremei 7.3.3 putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \ln(x_i)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

Observații. 1. Dacă $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ obținem că, $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}$, adică inegalitatea mediilor .

2. O variantă generalizată a inegalității lui Hölder este următoarea:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^q\right)^{1/q},$$

unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, p, q, λ_1, …, λ_n, x_1, …, x_n, y_1, …, $y_n > 0$ iar $n \geq 2$.

Pentru demonstrația acesteia recomandăm cititorului de exemplu lucrarea [19, p. 248].

3. Să se arate că dacă $a_1, …, a_n \geq 0$ atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{a_1 ... a_n}\right)^n.$$

(Cauchy)

Soluție. Putem scrie

$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) = 1 + \sum a_1 + \sum a_1 a_2 + ... + \sum a_1 a_2 ... a_k + ... + a_1 a_2 ... a_n$.

Conform inegalității mediilor, pentru $1 \leq k \leq n$ avem

$$\sum a_1 a_2 ... a_k \geq C_n^k \cdot \sqrt[C_n^k]{(a_1 a_2 ... a_n)^{C_{n-1}^{k-1}}} \Leftrightarrow \sum a_1 a_2 ... a_k \geq C_n^k \cdot (a_1 a_2 ... a_n)^{C_{n-1}^{k-1}/C_n^k} \Leftrightarrow$$

$\sum a_1 a_2 ... a_k \geq C_n^k \cdot (a_1 a_2 ... a_n)^{k/n}$, astfel că obținem:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum a_1 a_2 ... a_k\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k \cdot \sqrt[n]{(a_1 a_2 ... a_n)^k}\right) = \left(1 + \sqrt[n]{a_1 ... a_n}\right)^n.$$

4. Dacă $a_1, a_2, a_3 > 0$, atunci $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} \geq \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4}$.

Soluție. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, care este convexă pe $(0, \infty)$.

Fie $\lambda_1 = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \lambda_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \lambda_3 = \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

$x_1 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_2 a_3}, x_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1 a_3}, x_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1 a_2}$.

Conform Teoremei 7.3.3 putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1^2}{2a_2 a_3} + \frac{a_2^2}{2a_1 a_3} + \frac{a_3^2}{2a_1 a_2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{a_1^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{4a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{4a_1^2 a_3^2} + \frac{a_3^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{4a_1^2 a_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^2}{4a_1^2 a_2^2 a_3^2} \leq \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)}{4a_1^2 a_2^2 a_3^2} \Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} \geq \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4}.$$

5. Dacă $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ și $0 < x_i \leq 1$ pentru i = 1, 2, …, n, să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + x_i} \leq \frac{1}{1 + x_1^{a_1} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_i > 0$ pentru i = 1, 2, …, n. Notăm $y_i = \ln(x_i)$ şi deoarece $x_i \in (0, 1]$, rezultă că $y_i \in (-\infty, 0]$. Considerăm funcția $f:(-\infty, 0]\to\mathbb{R}$, $f(y) = (1+e^y)^{-1}$. Această funcție este de două ori derivabilă şi $f''(y) = e^y(e^y-1)(e^y+1)^{-3} \le 0$, pentru orice $y \in (-\infty, 0]$. Deci f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi conform inegalității lui Jensen avem $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+e^{y_i}} \le \frac{1}{1+e^{\sum_{i=1}^{n}a_iy_i}} = \frac{1}{1+\prod\limits_{i=1}^{n}e^{a_iy_i}} = \frac{1}{1+x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}}$,

cu egalitate dacă şi numai dacă $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, adică $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

6. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval iar $f_1, f_2, \ldots f_n : I\to\mathbb{R}_+$ funcții concave, $n\in\mathbb{N}$. Să se demonstreze că funcția $\sqrt[n]{f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n}$ este de asemenea concavă.

(OIM)

Soluție. Fie $F(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$. Prin ipoteză avem

$F(tx+(1-t)y) \ge \prod\limits_{i=1}^{n}\left(tf_i(x)+(1-t)f_i(y)\right) = \sum\limits_{k=0}^{n}t^k(1-t)^{n-k}\cdot\sum f_{i_1}(x)...f_{i_k}(x)f_{i_{k+1}}(y)...f_{i_n}(y)$, unde a doua sumă conține C_n^k termeni corespunzători posibilităților de a alege submulțimile $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Din inegalitatea mediilor deducem că

$$\sum f_{i_1}(x)...f_{i_k}(x)f_{i_{k+1}}(y)...f_{i_n}(y) \ge C_n^k\left[F(x)^{C_{n-1}^{k-1}}\cdot F(y)^{C_{n-1}^{n-k-1}}\right]^{1/C_n^k} = C_n^k\cdot(F(x))^{\frac{k}{n}}\cdot(F(y))^{\frac{n-k}{n}}.$$

Deci $F(tx+(1-t)y) \ge \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cdot[t(F(x))^{\frac{1}{n}}]^k\cdot[(1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}}]^{n-k} = [t(F(x))^{\frac{1}{n}}+(1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}}]^n$,

adică tocmai ceea ce trebuia probat.

Capitolul 8

INEGALITĂȚI

8.1. Inegalități algebrice clasice

a. **Inegalitatea mediilor**

Una dintre cele mai interesante şi utile inegalități algebrice este fără doar şi poate următoarea inegalitate:

(1) Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale pozitive atunci $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$ (cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$). Altfel spus, media aritmetică a n numere pozitive este mai mare sau egală cu media lor geometrică.

Inegalitatea (1) este cunoscută sub numele de *inegalitatea mediilor* şi se pare că cel care a pus-o în evidență a fost Cauchy. Câteva demonstrații ale acestei inegalități au fost prezentate în paragraful 6.2 de la Capitolul 6. Pe parcursul acestei lucrări vom prezenta şi alte demonstrații ale lui (1).

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, atunci din (1) deducem imediat

$$(2) \qquad \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

(cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = \ldots = a_n$).

Această ultimă inegalitate exprimă faptul că media geometrică a n numere strict pozitive este mai mare sau egală cu media lor armonică.

b. **Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz**

O altă inegalitate foarte des întâlnită în algebră este

(3) Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ atunci

$$\left(a_1b_1+\ldots+a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)$$

(cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \lambda b_i$, $1 \leq i \leq n$).

Inegalitatea (3) este cunoscută sub numele de *inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz* (CBS).

Există şi pentru această inegalitate mai multe demonstrații.

O primă demonstrație utilizează proprietățile trinomului de gradul II. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a_1x+b_1)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$.

Se observă că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar pe de altă parte

$$f(x) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+\ldots+b_n^2)$$

şi cum $a_1^2+\ldots+a_n^2 \geq 0$ cu necesitate

$$\Delta_f \leq 0 \Leftrightarrow (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2-(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) \leq 0 .$$

Egalitate avem atunci când există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_1\lambda + b_1 = \ldots = a_n\lambda + b_n = 0$, adică atunci când există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \lambda b_i$, $1 \leq i \leq n$.

O altă demonstrație a inegalității (3) se bazează pe identitatea lui Lagrange $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \ge 0$ (vezi Corolarul 10.1.20).

Există mai multe variante de generalizare a inegalității (3).

Iată una dintre ele:

Dacă a_i, b_i, c_i sunt numere reale pozitive ($1 \le i \le n$) atunci

$$(4) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right).$$

Într-adevăr fie $a=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)^{1/3}, b=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)^{1/3}, c=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)^{1/3}$ şi $x_i=\frac{a_i}{a}, y_i=\frac{b_i}{b}, z_i=\frac{c_i}{c}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ avem $a_i b_i c_i = abc x_i y_i z_i \le abc\frac{x_i^3+y_i^3+z_i^3}{3}$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \le \frac{abc}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3+\sum_{i=1}^{n} y_i^3+\sum_{i=1}^{n} z_i^3\right)=\frac{abc}{3}\left(\frac{a_1^3+\ldots+a_n^3}{a^3}+\frac{b_1^3+\ldots+b_n^3}{b^3}+\frac{c_1^3+\ldots+c_n^3}{c^3}\right)=$$

$= \frac{abc}{3}(1+1+1)=abc$, de unde $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \le a^3b^3c^3=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)$.

Se observă că avem egalitate în (4) atunci când există α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i = \alpha b_i = \beta c_i$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

După ideea de demonstrație a inegalității (4) se poate demonstra şi inegalitatea:

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \ge 2$ şi $a_{ij} \ge 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $j = 1, 2, \ldots, n$, atunci

(5) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi}\right)^m \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}^m\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}^m\right)\ldots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi}^m\right)$, cu egalitate dacă pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, n-uplele $(a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ sunt proporționale.

c. **Inegalitatea lui Minkovski**

Inegalitatea (3) admite următoarea formă echivalentă

$$(6) \qquad \sqrt{(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2},$$

cunoscută şi sub numele de *inegalitatea lui Minkovski* (forma clasică).

Inegalitatea (6) admite următoarea generalizare (Huygens) :

Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ iar $p \ge 2$ este un număr natural, atunci

$$(7) \quad \sqrt[p]{(a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p} \le \sqrt[p]{a_1^p+\ldots+a_n^p}+\sqrt[p]{b_1^p+\ldots+b_n^p}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea (7) vom utiliza varianta generalizată a inegalității lui Hölder (vezi paragraful 7.3 de la Capitolul 7).

Într-adevăr, dacă notăm $q=\frac{p}{p-1}$, atunci $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi obținem

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p=\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}.$$

După simplificare prin $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$ deducem că

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p} \Leftrightarrow \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}a_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}b_i^p},$$

adică (7).

Observație. O prezentare mai generală a lui (7) se află în [19] şi are următoarea formă:

Dacă $p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $n \ge 2$ şi $p_1+\ldots+p_n=1$, atunci

$$(8) \qquad \prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p_i} \ge \prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i} + \prod_{i=1}^{n}b_i^{p_i},$$

cu egalitate dacă $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ sunt proporționale.

În cazul $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ obținem (7).

d. **Inegalități de tip Cebâşev**

Fie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Sub numele de *inegalități de tip Cebâşev* sunt cunoscute următoarele inegalități:

Dacă $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge (\le) 0$, pentru orice i, j = 1, 2, …, n atunci

$$(9) \quad n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \ge (\le)(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1= \ldots= a_n$, sau $b_1= \ldots= b_n$.

Pentru demonstrarea inegalităților de tipul (9) se pleacă de la echivalența $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge (\le) 0 \Leftrightarrow a_ib_i + a_jb_j \ge (\le) a_ib_j + a_jb_i$ iar apoi se sumează după i şi respectiv j.

Pentru demonstrarea cazului în care avem egalitate în (9) recomandăm cititorului lucrarea [19] (îl avertizăm însă că nu este o chestiune prea simplă!).

e**. Inegalitatea lui Bernoulli**

Sub numele de *forma clasică discretă a inegalității lui Bernoulli* este cunoscută în literatura matematică inegalitatea :

Dacă a > -1 atunci pentru orice număr natural n,

(10) $(1+a)^n \ge 1 + na$, cu egalitate dacă a = 0.

Demonstrația lui (10) se poate face de exemplu prin inducție matematică relativ la n.

O generalizare a inegalității (10) este următoarea :

Dacă $a_1, \ldots, a_n \in (-1, 0]$ sau $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$, atunci

(11) $(1+a_1)\ldots(1+a_n) \ge 1 + a_1 + \ldots + a_n$

(cu egalitate dacă cel puțin n-1 dintre numerele $a_1, \ldots, a_n$ sunt egale cu 0).

Demonstrația lui (11) se poate face de exemplu tot prin inducție matematică relativ la n.

Observăm că dacă $a_1 = \ldots = a_n = a > -1$ obținem (10).

Cu ajutorul analizei matematice se poate demonstra următoarea formă continuă a inegalității lui Bernoulli:

Dacă x > -1, α > 1 sau α < 0,

(12) $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$ (cu egalitate dacă x = 0).

Dacă x > -1, 0 < α < 1 atunci

(13) $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$ (cu egalitate dacă x = 0).

În acest sens se studiază monotonia funcției $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$ şi se obțin concluziile de mai sus.

Observație. În [19, p.246] se prezintă alte tipuri de generalizări ale inegalității lui Bernoulli.

f. Inegalitatea lui Hardy-Littlewood-Polya-Karamata

Fie I un interval de numere reale, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă pe I iar $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ elemente din I ($n \geq 2$) astfel încât $x_1 \geq y_1$, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, …, $x_1 + \ldots + x_{n-1} \geq y_1 + \ldots + y_{n-1}$, $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

Atunci: (14) $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_n)$.

Dacă f este strict convexă, atunci în (14) avem egalitate dacă şi numai dacă $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Iată o demonstrație utilizând inducția matematică după n.

Pentru $n = 2$ avem de arătat că dacă $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$, $x_1 \geq y_1$ şi $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, atunci $f(x_1) + f(x_2) \geq f(y_1) + f(y_2)$.

Deducem imediat că $x_1 \geq y_1 \geq y_2 \geq x_2$ şi $y_1 = px_1 + (1-p)\, x_2$, $y_2 = (1-p)\, x_1 + px_2$, cu $p = \dfrac{y_1 - x_2}{x_1 - x_2} \in [0, 1]$ (cazul $x_1 = x_2$ este banal!).

Conform inegalității lui Jensen avem $f(y_1) = f(px_1 + (1-p)\, x_2) \leq p\, f(x_1) + (1-p)\, f(x_2)$, $f(y_2) = f((1-p)x_1 + px_2) \leq (1-p)f(x_1) + pf(x_2)$, de unde deducem $f(y_1) + f(y_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

Dacă f este strict convexă avem egalitate pentru $p = 1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ şi cum $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ deducem că $x_2 = y_2$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru n şi fie $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1}$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq y_{n+1}$ iar $x_1 \geq y_1$, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, …, $x_1 + \ldots + x_n \geq y_1 + \ldots + y_n$, $x_1 + \ldots + x_{n+1} = y_1 + \ldots + y_{n+1}$.

Pentru ultima inegalitate deducem că există $y \geq 0$ astfel încât $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n + y$ şi atunci $x_{n+1} + y = y_{n+1}$. Aplicând ipoteza de inducție pentru n-uplurile $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + y)$, deducem că $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_{n-1}) + f(y_n + y)$, de unde deducem că $f(x_1) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}) \geq f(y_1) + \ldots + f(y_{n-1}) + f(y_n + y) + f(x_{n+1})$.

Astfel este suficient să demonstrăm că $f(y_n + y) + f(x_{n+1}) \geq f(y_n) + f(y_{n+1})$, ceea ce ne este asigurat de cazul $n = 2$.

Dacă f este strict convexă, atunci egalitatea din cazul n+1 implică $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + y)$ şi $(y_n + y, x_{n+1}) = (y_n, y_{n+1})$, adică $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_{n+1})$.

g. Inegalitatea lui Popoviciu

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval iar $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă. Atunci

(15) $f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\dfrac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\dfrac{x+z}{2}\right)$, pentru orice x, y, $z \in I$.

Dacă f este strict convexă în (15) avem egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$.

Încercăm să utilizăm inegalitatea Karamata iar pentru aceasta să presupunem că $x \geq y \geq z$; cum $x \geq \dfrac{x+y+z}{3} \geq z$ rămâne să comparăm y cu $\dfrac{x+y+z}{3}$.

Dacă $y \geq \dfrac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow y \geq \dfrac{x+z}{2}$ atunci inegalitatea (15) rezultă prin aplicarea inegalității lui Karamata pentru 6-uplurile

$$\left(x, y, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, z\right), \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right).$$

Prin calcule elementare se arată că cele două 6-upluri verifică condițiile din ipoteza inegalității lui Karamata.

Dacă $y \leq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow y \leq \frac{x+z}{2}$ aplicăm din nou inegalitatea lui Karamata pentru 6-uplurile

$$\left(x, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, y, z\right), \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$$

care verifică de asemenea condițiile din ipoteza inegalității lui Karamata.

Observații. 1. Pentru I = [0, ∞) și f : I→ℝ, f(x) = x^2 , obținem exercițiul 8.14 (căruia i-am prezentat o soluție utilizând identitatea lui Abel).

2. O generalizare a inegalității Popoviciu este formulată de Alexandru Lupaş sub forma :

Fie I ⊆ℝ un interval iar f : I→ℝ o funcție convexă.

Atunci pentru orice x, y, z ∈ I şi p, q, r ≥ 0, avem inegalitatea:

$$(16) \qquad pf(x)+qf(y)+rf(z)+(p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \geq$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)+(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)+(r+p)f\left(\frac{rx+pz}{r+p}\right).$$

Pentru demonstrație recomandăm [19, p 394].

3. Aplicând inegalitatea lui Popoviciu funcției f : (0, ∞) →ℝ, $f(x)=\frac{1}{x}$ obținem că dacă a, b, c > 0, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}$.

8.2**. Forma integrală a unor inegalități algebrice clasice**

Fie n ≥ 1 un număr natural, a, b ∈ ℝ, a < b şi $\Delta_n = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ o mulțime de puncte intermediare ale intervalului [a, b]. Reamintim că prin norma lui Δ_n înțelegem numărul $\|\Delta_n\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$. Prin sistem de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n înțelegem o familie $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de numere reale astfel încât $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pentru orice 1 ≤ i ≤ n.

Din analiza matematică se cunoaşte că dacă f : [a, b] →ℝ este o funcție integrabilă (în sens Riemann) atunci pentru orice şir $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ de diviziuni ale lui [a, b] astfel încât $\|\Delta_n\| \to 0$ când $n \to \infty$ şi pentru orice alegere a sistemelor $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de puncte intermediare

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx.$$

În particular deducem că

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

iar dacă a = 0 şi b = 1 atunci

(19) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx .$$

Să considerăm acum a, b ∈ ℝ, a < b şi f , g : [a, b] →ℝ funcţii continue.

Cum pentru orice λ ∈ ℝ, $(f-\lambda g)^2 \ge 0$ pe [a, b], deducem că

$$\int_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2 dx \ge 0 \Leftrightarrow \lambda^2\int_a^b g^2(x)dx - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0$$

deci cu necesitate $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx \le 0 \Leftrightarrow$

(20) $$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx ,$$

obţinând astfel *varianta integrală a inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwartz*.

Egalitate avem dacă $f=\lambda g$ cu λ ∈ ℝ.

O altă demonstraţie a lui (20) se poate obţine imediat folosind varianta integrală a identităţii lui Lagrange:

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x)g(y)-f(y)g(x))^2 dxdy .$$

Să probăm acum forma integrală a inegalităţilor algebrice de tip Cebâşev iar pentru acesta fie a, b ∈ ℝ, a < b iar f , g : [a, b] →ℝ două funcţii integrabile astfel încât $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \ge 0$ pentru orice x ∈ [a, b].

Condiţia de mai sus se poate scrie şi sub forma $f(x)g(x)+f(y)g(y) \ge f(x)g(y)+f(y)g(x)$, astfel că integrând în raport cu x deducem că pentru orice y ∈ [a, b] avem

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + (b-a)f(y)g(y) \ge g(y)\int_a^b f(x)dx + f(y)\int_a^b g(x)dx .$$

Integrând acum în raport cu y deducem că

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx + (b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy \ge \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(y)dy + \int_a^b g(x)dx\cdot\int_a^b f(y)dy \Leftrightarrow$$

(21) $$\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx .$$

Inegalitatea (21) reprezintă *forma integrală a inegalităţilor de tip Cebâşev.*

Observaţii. 1. Astfel, dacă din punct de vedere al monotoniei, f şi g sunt ambele fie crescătoare, fie descrescătoare în (21) avem semnul ≥. Dacă f şi g sunt de monotonie diferită atunci (21) capătă forma

(22) $$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx .$$

2. Atât în cazul lui (21) cât şi în cazul lui (22) avem egalitate dacă şi numai dacă una din cele două funcţii este constantă (vezi [48]).

3. O altă demonstraţie pentru (22) se poate prezenta considerând diviziunea

$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ cu punctele intermediare $\xi_k = x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ şi aplicând forma discretă a inegalității Cebâşev $n\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_j)$, obținem

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) \geq \frac{1}{b-a}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right),$$

de unde prin trecere la limită după $n \to \infty$ deducem (21) (analog pentru (22)).

Să considerăm în continuare a, b $\in \mathbb{R}$, a < b iar f : [a, b] $\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă, $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ iar g : [m, M] $\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi convexă (concavă).

Alegem diviziunea lui [a, b] $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ cu punctele intermediare $\xi_k = x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $0 \leq k \leq n$.

Conform inegalității lui Jensen avem:

$$g\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right) \leq (\geq) \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g \circ f)(\xi_k), \text{ de unde}$$

$$g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right)\right] \leq (\geq) \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g \circ f)(\xi_k)\right].$$

Trecând la limită în această formă finală după $n \to \infty$ deducem

$$(23) \qquad g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\right] \leq (\geq) \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g(f(x))dx.$$

Inegalitățile de tip (23) reprezintă *forma integrală a inegalității lui Jensen.*

Egalitate în (23) avem dacă de exemplu g este funcția identică.

Capitolul 9

GRUPURI FINITE

9.1. Preliminarii. Teorema lui Lagrange. Ecuaţia claselor

În cadrul acestui capitol prin G vom desemna un grup multiplicativ iar pentru o submulţime nevidă M a lui G, prin <M> vom desemna subgrupul lui G generat de M. Dacă M este formată doar din elementul x, atunci vom nota prin <x> *grupul ciclic* generat de M.

Prin *ordinul* unui grup înţelegem cardinalul mulţimii G.

Prin H≤G vom desemna faptul că o submulţime H a lui G este subgrup.

Definiţia 9.1.1. *Ordinul* **unui element x∈G notat o(x) se defineşte ca fiind o(x)=|<x>|.**

Evident, o(1) = 1 iar dacă x≠1 şi o(x) = n, atunci n este cel mai mic număr natural pentru care $x^n = 1$. Dacă o(x) = ∞, atunci $x^n \neq 1$, pentru orice n ≥ 1.

Observaţia 9.1.2. 1. Dacă $x \in G$ este de ordin finit şi există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n = 1$, atunci o(x)$|n$.

Într-adevăr, împărţind pe n la o(x) găsim c, r $\in \mathbb{N}$ astfel încât $n = c \cdot o(x) + r$ şi $r < o(x)$.

Din $x^{o(x)} = x^n = 1$ deducem imediat că şi $x^r = 1$, adică r = 0 (ţinând cont de minimalitatea lui o(x)), deci o(x)$|n$.

2. Dacă $x, y \in G$, astfel încât o(x) şi o(y) sunt finite, xy = yx şi (o(x), o(y)) = 1, atunci o(xy) = o(x)o(y).

Într-adevăr, dacă notăm m = o(x), n = o(y) şi p = o(xy), din $x^m = y^n = 1$ deducem că $(xy)^{mn} = x^{mn} \cdot y^{mn} = 1$, adică p $|mn$. Din o(xy) = p deducem că $(xy)^p = 1$, deci $x^p = y^{-p}$ iar de aici $x^{np} = (y^n)^{-p} = 1$, adică $m|np$ şi cum (m,n) = 1 deducem că $m|p$. Analog $n|p$ şi cum (m,n) = 1 deducem că $mn|p$, adică p = mn.

3. Din cele de mai înainte deducem recursiv că dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ ($n \geq 2$) şi cele n elemente comută între ele iar ordinele a oricare două (diferite) sunt prime între ele, atunci $o(x_1 ... x_n) = o(x_1) ... o(x_n)$.

Definiţia 9.1.3. Pentru x∈G vom nota $C_G(x)$ = { y∈G : xy=yx } şi Z(G)= $\bigcap_{x \in G}$ $C_G(x)$. $C_G(x)$ se numeşte *centralizatorul lui* **x în G iar Z(G)** *centrul* **lui G; în mod evident, Z(G)={x∈G ; xy = yx, pentru orice y∈G}.**

Propoziţia 9.1.4. Pentru orice x∈G, $C_G(x)$≤G.

Demonstraţie. Dacă y, z $\in C_G(x)$, atunci yx = xy şi zx =xz. Deducem imediat că $y^{-1}x = xy^{-1}$ iar $(y^{-1}z)x = y^{-1}(zx) = y^{-1}(xz) = (y^{-1}x)z = (xy^{-1})z = x(y^{-1}z)$, adică $y^{-1}z \in C_G(x)$, deci $C_G(x)$ ≤G.■

Corolar 9.1.5. Z(G)≤G.

Demonstrație. Avem $Z(G)=\bigcap_{x\in G} C_G(x)$ şi cum o intersecție oarecare de subgrupuri este subgrup, atunci $Z(G)\leq G$.■

Fie acum $H\leq G$ şi $x\in G$.

Definim $xH = \{xh : h\in H\}$ şi $Hx = \{hx : h\in H\}$. Mulțimea xH (Hx) poartă numele de *clasa la stânga (dreapta)* a lui x în raport cu H.

Propoziția 9.1.6. Dacă $x, y\in G$ şi $H\leq G$ atunci

(i) $xH = yH \Leftrightarrow x^{-1}y\in H$

(ii) $Hx = Hy \Leftrightarrow xy^{-1}\in H$.

Demonstrație. (i).Să presupunem că $xH = yH$. Cum $1\in H$, $x = x \cdot 1 \in xH = yH$, adică $x = yh$ cu $h \in H$. Deducem că $y^{-1}x=h \in H$ şi cum $h^{-1} \in H$ avem că $h^{-1} = x^{-1}y \in H$. Reciproc, fie $x^{-1}y = h\in H$ şi $z\in xH$, adică $z = xk$ cu $k\in H$. Cum $x = yh^{-1}$ avem $z = (yh^{-1})k = =y(h^{-1}k)$, adică $z\in yH$ (căci $h^{-1}k\in H$), deci $xH\subseteq yH$. Analog deducem că şi $yH\subseteq xH$, de unde $xH=yH$.

(ii). Analog.■

Corolar 9.1.7. Dacă $H\leq G$, atunci pentru $x\in G$, $xH = H$ (sau $Hx = H$) $\Leftrightarrow x\in H$. În particular, $1\cdot H = H$.

Vom nota $(G/H)_s = \{xH : x\in G\}$ şi $(G/H)_d = \{Hx : x\in G\}$.

Propoziția 9.1.8. $(G/H)_s$ şi $(G/H)_d$ sunt partiții ale lui G.

Demonstrație. Este suficient să probăm pentru $(G/H)_s$. Deoarece pentru orice $x\in G$ avem $x = x\cdot 1\in xH$ deducem că $\bigcup_{x\in G} xH = G$.

Fie acum $x, y\in G$ şi să demonstrăm că $xH=yH$ sau $xH\cap yH=\emptyset$. Avem că $x^{-1}y\in H$ sau $x^{-1}y\notin H$. Dacă $x^{-1}y \in H$, conform Propoziției 9.1.6, $xH=yH$. Să presupunem acum că $x^{-1}y\notin H$. Dacă ar exista $z\in xH\cap yH$, atunci $z=xh=yk$ cu $h, k \in H$ şi am deduce imediat că $x^{-1}y= hk^{-1}\in H$ -absurd. Deci în cazul $x^{-1}y\notin H$ avem $xH\cap yH=\emptyset$. ■

Propoziția 9.1.9. Funcția $f : (G/H)_s \to (G/H)_d$, $f(xH)=Hx^{-1}$ pentru orice $x\in G$ este o bijecție .

Demonstrație. Pentru $x, y\in G$ echivalențele $xH=yH \Leftrightarrow x^{-1}y\in H \Leftrightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow Hx^{-1}= Hy^{-1}$ (conform Propoziției 9.1.6) ne arată că f este corect definită şi că este injectivă. Cum surjectivitatea lui f este imediată, deducem că f este bijecție.■

Din propoziția precedentă deducem că $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$; acest număr cardinal se notează $|G:H|$ şi poartă numele de *indicele* lui H în G.

Lema 9.1.10. Dacă $H\leq G$ şi $x\in G$, atunci $|xH|=|Hx|=|H|$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că mulțimile xH şi H sunt echipotente iar în acest sens definim $f_x : H \to xH$, $f_x(h) = xh$ pentru orice $h\in H$.

Dacă $h, k\in H$ şi $f_x(h) = f_x(k)$ atunci $xh=xk$, deci $h=k$ adică f este injectivă. Cum f_x este în mod evident şi surjectivă, deducem că f_x este o bijecție şi astfel $|xH|=|H|$.■

Teorema 9.1.11. Dacă $H\leq G$, atunci

$$|G|= |H|\cdot|G:H| .$$

Demonstrație. Cum $(G/H)_s$ este o partiție a lui G avem $|G| = \sum_{x\in G} |xH|$ (sumarea făcându-se după clase distincte).

Ţinând cont de Lema 9.1.10 deducem că $|G|=|H|\cdot|G:H|$.■

În cazul în care G este un grup finit, atunci $|G|$, $|H|$ şi $|G : H|$ sunt numere naturale iar relaţia $|G|=|H|\cdot|G:H|$ arată că $|H|$ este un divizor al lui $|G|$.

Obţinem astfel:

Corolar 9.1.12. (*Lagrange*) Ordinul oricărui subgrup al unui grup finit divide ordinul grupului.

Corolar 9.1.13. Dacă G este un grup finit de ordin n, atunci $x^n=1$ pentru orice $x \in G$.

Demonstraţie. Dacă $k=o(x)$, atunci $x^k=1$ şi $k|n$ (conform teoremei lui Lagrange), adică $n=kt$ cu $t\in\mathbb{N}$. Atunci $x^n=x^{kt}=(x^k)^t=1^t=1$.■

Definiţia 9.1.14. Vom spune despre elementele $x, y\in G$ că sunt *conjugate* în G şi vom scrie $x \sim y$ dacă există $a\in G$ astfel încât $x=a^{-1}ya$.

Propoziţia 9.1.15. Relaţia de conjugare $\sim$ este o echivalenţă pe G.

Demonstraţie. Deoarece pentru orice $x\in G$, $x=1^{-1}x1$ deducem că $x\sim x$, adică relaţia $\sim$ este reflexivă. Dacă $x, y\in G$ şi $x \sim y$, atunci există $a\in G$ astfel încât $x=a^{-1}ya$.

Cum $y=axa^{-1}=(a^{-1})^{-1}xa^{-1}$ deducem că şi $y\sim x$, adică relaţia $\sim$ este şi simetrică.

Fie acum x, y, z astfel încât $x\sim y$ şi $y\sim z$. Atunci există $a, b\in G$ astfel încât $x=a^{-1}ya$ şi $y=b^{-1}zb$. Deducem că $x=a^{-1}(b^{-1}zb)a = (a^{-1}b^{-1})\, z\, (ba) = (ba)^{-1}\, z\, (ba)$, adică $x\sim z$ şi astfel $\sim$ este şi tranzitivă, deci o relaţie de echivalenţă pe G.■

Pentru $x\in G$, prin $[x]_\sim$ vom desemna clasa de echivalenţă a lui x în raport cu relaţia $\sim$ care se mai zice şi *clasa de conjugare a lui x* (altfel zis, $[x]_\sim$ este mulţimea conjugaţilor lui x în G, adică $[x]_\sim=\{axa^{-1} : a \in G\}$).

Propoziţia 9.1.16. Pentru orice $x \in G$, $|[x]_\sim|=|G : C_G(x)|$.

Demonstraţie. Fie $H=C_G(x)$. Dacă $a, b\in G$ atunci din echivalenţele $axa^{-1}=bxb^{-1} \Leftrightarrow xa^{-1}b=a^{-1}bx \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow aH=bH$ deducem că funcţia $f:[x]_\sim\to(G/H)_s$, $f(axa^{-1}) = aH$ pentru orice $a\in G$ este corect definită şi injectivă. Cum în mod evident f este şi surjecţie deducem că f este bijecţie, adică $|[x]_\sim|=|(G/H)_s|=|G:H|=|G : C_G(x)|$.■

Deoarece $\{[x]_\sim\}_{x\in G}$ formează o partiţie a lui G deducem că $G = \bigcup\limits_{x\in G}[x]_\sim$ (vom lua reuniunea după elementele $x\in G$ ce nu sunt conjugate între ele). Să remarcăm şi faptul că dacă $x\in Z(G)$, atunci $[x]_\sim=\{x\}$. Astfel, $|G|=\sum\limits_{x\in G}|[x]_\sim|$ (sumarea făcându-se după elementele neconjugate). Scriind

$|G|=\sum\limits_{x\in Z(G)}|[x]_\sim|+\sum\limits_{x\notin Z(G)}|[x]_\sim|=\sum\limits_{x\in Z(G)}|\{x\}|+\sum\limits_{x\notin Z(G)}|[x]_\sim|$ şi ţinând cont de Propoziţia 9.1.16 obţinem relaţia $|G|=|Z(G)|+\sum\limits_{x\notin Z(G)}|G:C_G(x)|$, cunoscută sub numele de *ecuaţia claselor*.

În continuare vom aplica ecuaţia claselor în special în cazul în care grupul G este finit.

Observaţia 9.1.17. Dacă notăm $H=n\mathbb{Z}$ am văzut că $H\leq(\mathbb{Z},+)$ iar cum $(\mathbb{Z},+)$ este grup comutativ, de fapt $H\trianglelefteq(\mathbb{Z},+)$.

Deoarece pentru orice $0 \le k \le n-1$, $\hat{k} = \{k+cn : c \in \mathbb{Z}\} = k+H$, atunci $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/H$.

Astfel, dacă pentru $\hat{k}, \hat{t} \in \mathbb{Z}_n$ definim $\hat{k} + \hat{t} = \widehat{k+t}$, atunci $(\mathbb{Z}_n, +)$ devine grup (comutativ) în care elementul neutru este $\hat{0}$ iar $-\hat{k} = \widehat{n-k}$ pentru orice $0 \le k \le n-1$. Deducem imediat că $\mathbb{Z}_n = <\hat{1}>$, adică $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup ciclic cu n elemente.

Să definim acum şi înmulţirea claselor de resturi modulo n, pentru $\hat{k}, \hat{t} \in \mathbb{Z}$ prin $\hat{k} \cdot \hat{t} = \widehat{kt}$. Dacă $\hat{k} = \widehat{k'}$ şi $\hat{t} = \widehat{t'}$, atunci $n \mid k-k'$ şi $n \mid t-t'$, astfel că dacă scriem $kt-k't' = k(t-t')+t'(k-k')$ deducem că $n \mid kt-k't' \Leftrightarrow \widehat{kt} = \widehat{k't'}$, adică înmulţirea claselor de resturi este corect definită.

Propoziţia 9.1.18. $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ este monoid comutativ iar $U(\mathbb{Z}_n, \cdot) = \{\hat{k} : (k, n) = 1\}$.

Demonstraţie. Asociativitatea înmulţirii pe $\mathbb{Z}_n$ este imediată (ea reducându-se la asociativitatea înmulţirii pe $\mathbb{Z}$). Elementul neutru este $\hat{1}$ deoarece $\hat{k} \cdot \hat{1} = \hat{k}$, pentru orice $\hat{k} \in \mathbb{Z}_n$. Dacă $\hat{k} \in \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ atunci există $\hat{t} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\hat{k} \cdot \hat{t} = \hat{1} \Leftrightarrow n \mid kt-1$, de unde cu necesitate $(k, n)=1$.

Reciproc, dacă $(k, n)=1$, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha k+\beta n=1$, de unde $\hat{\alpha} \cdot \hat{k} = \hat{1}$, adică $\hat{k} \in \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, iar $\hat{k}^{-1} = \hat{\alpha}$. ■

Observaţia 9.1.19. Funcţia $\varphi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, definită prin $\varphi(1)=\varphi(2)=1$ iar pentru $n \ge 3$, $\varphi(n)$=numărul numerelor naturale m astfel încât $m<n$ şi $(m, n)=1$ poartă numele de *indicatorul lui Euler*. Astfel, pentru $n>2$, $|U(\mathbb{Z}_n, \cdot)| = \varphi(n)$.

Propoziţia 9.1.20. Fie G un grup ciclic, $G = <x>$, $x \ne 1$. Dacă $o(x) = \infty$, atunci $(G, \cdot) \approx (\mathbb{Z}, +)$ pe când dacă $o(x) = n$ $(n \ge 2)$ atunci $(G, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_n, +)$.

Demonstraţie. Dacă $o(x)=\infty$, atunci $x^k \ne 1$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}^*$ iar $G=\{x^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Definim $f: (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$, $f(k)=x^k$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Dacă $k, t \in \mathbb{Z}$ şi $k \ne t$, atunci $x^k \ne x^t$ (căci în caz contrar ar rezulta că $x^{k-t} = 1$ sau $x^{t-k} = 1$, după cum $k>t$ sau $t>k$), adică $f(k) \ne f(t)$, deci f este funcţie injectivă. În mod evident f este surjectivă, adică bijectivă. Deoarece $f(k+t) = x^{k+t} = x^k \cdot x^t = f(k) \cdot f(t)$ pentru orice $k, t \in \mathbb{Z}$ deducem că f este şi morfism de grupuri adică izomorfism de grupuri şi deci $(G, \cdot) \approx (\mathbb{Z}, +)$.

Dacă $o(x)=n$, atunci $G=\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ şi atunci definim $f: (\mathbb{Z}_n, +) \to (G, \cdot)$ prin $f(\hat{k}) = x^k$ pentru orice $0 \le k \le n-1$.

Dacă $x^k = x^t$ (cu $0 \le k, t \le n-1$) atunci presupunând că $k>t$ deducem că $n \mid k-t$ şi astfel $\hat{k} = \hat{t}$, adică f este injectivă. În mod evident f este şi surjectivă, adică f este bijectivă.

Deoarece $f(\hat{k} + \hat{t}) = f(\widehat{k+t}) = x^{k+t} = x^k \cdot x^t = f(\hat{k}) \cdot f(\hat{t})$ pentru orice $\hat{k}, \hat{t} \in \mathbb{Z}_n$ deducem că f este şi morfism de grupuri, adică izomorfism de grupuri. ■

Ca un corolar al teoremei de corespondenţă pentru grupuri putem să caracterizăm subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_n, +)$ pentru $n \ge 2$. După cum am văzut mai înainte $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Conform teoremei de corespondenţă pentru grupuri orice subgrup al lui $\mathbb{Z}_n$ va fi de forma

$K/n\mathbb{Z}$ unde $K\leq(\mathbb{Z},+)$ astfel încât $n\mathbb{Z}\subseteq K$ şi în plus $\mathbb{Z}_n/(K/n\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/K$. Avem că $K=d\mathbb{Z}$ cu d divizor natural al lui n.

Prin urmare, orice subgrup H al lui $\mathbb{Z}_n$ este de forma $H=(d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$ unde $d>0$ şi $d|n$ iar $\mathbb{Z}_n/H \approx \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_d$. Pentru un astfel de grup H avem $|\mathbb{Z}_n:H|=|\mathbb{Z}_d|=d$ iar conform teoremei lui Lagrange $|H| = |\mathbb{Z}_n| / |\mathbb{Z}_n:H| = n/d$. În plus K este grup ciclic, anume $K=<\hat{d}>$, unde $\hat{d}=d+n\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}_n$.

Pentru exemplificare să considerăm n = 12. Divizorii lui 12 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 12, deci subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{12}$ sunt: $1\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}= \mathbb{Z}_{12} = \{\hat{0}, \hat{1},..., \widehat{11}\}$, $2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \widehat{10}\}$, $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\}$, $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, $6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{6}\}$ şi $12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}\}$.

9.2. Produse directe de grupuri

Fie $G_1, G_2, \ldots, G_n$ $(n\geq2)$ grupuri (multiplicative) iar $G = G_1 \times \ldots \times G_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Definind pentru $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in G$, $xy = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$, G devine monoid în care $1=(1,\ldots,1)$. Deoarece $(x_1,..., x_n)(x_1^{-1},..., x_n^{-1}) = (x_1x_1^{-1},..., x_nx_n^{-1}) = (1,\ldots,1) =1= (x_1^{-1}x_1,..., x_n^{-1}x_n) = (x_1^{-1},..., x_n^{-1})(x_1,..., x_n)$ deducem că $(x_1^{-1},..., x_n^{-1}) = x^{-1}$, de unde concluzia că G devine grup.

Pentru fiecare $1 \leq i \leq n$, $p_i : G \to G_i$, $p_i(x) = x_i$ pentru orice $x = (x_1,\ldots,x_n)\in G$ este morfism surjectiv de grupuri iar dubletul $(G, (p_i)_{1\leq i\leq n})$ verifică următoarea proprietate de universalitate:

Pentru oricare grup G' şi orice familie de morfisme de grupuri, $(p'_i)_{1\leq i\leq n}$ cu $p'_i : G\to G'_i$ pentru $1\leq i \leq n$, există un unic morfism de grupuri $u : G'\to G$ astfel încât $p_i o u=p'_i$ pentru orice $1\leq i \leq n$.

Grupul G (împreună cu morfismele, $(p_i)_{1\leq i\leq n}$) poartă numele de *produsul direct* al grupurilor $G_1, \ldots, G_n$.

Propoziția 9.2.1 Dacă $G_1, \ldots, G_n$ sunt grupuri, atunci $Z(G_1 \times \ldots \times G_n) = Z(G_1) \times \ldots \times Z(G_n)$ astfel că $G_1 \times \ldots \times G_n$ este grup comutativ dacă şi numai dacă fiecare dintre grupurile $G_1 \ldots G_n$ este comutativ .

Demonstrație. Dacă $x, y \in G = G_1 \times \ldots \times G_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ atunci $xy = yx \Leftrightarrow (x_1y_1, \ldots, x_ny_n) = (y_1x_1, \ldots, y_nx_n) \Leftrightarrow x_1y_1 = y_1x_1 , \ldots , x_ny_n = y_nx_n$, de unde egalitatea $Z(G)=Z(G_1) \times \ldots \times Z(G_n)$. ■

Teorema 9.2.2. Fie G un grup, H, K $\trianglelefteq$ G astfel încât $H\cap K = \{1\}$ şi $HK=G$. Atunci $G \approx H \times K$.

Demonstrație. Reamintim că $HK=\{hk : h\in H, k\in K\}$. Să probăm acum că pentru orice $x\in G$, elementele $h\in H$ şi $k\in K$ pentru care $x=hk$ sunt unice. Într-adevăr, dacă mai avem h',k' astfel încât $h'\in H$, $k'\in K$ şi $x = hk =h'k'$, atunci $h'^{-1}h=k'k^{-1} \in H\cap K = \{1\}$, de unde $h'^{-1}h = k'k^{-1} = 1\Leftrightarrow h=h'$, $k=k'$.

Fie acum $h\in H$, $k\in K$ şi $x = h^{-1}k^{-1}hk$. Cum $K\trianglelefteq G$ deducem că $h^{-1}k^{-1}h\in K$, astfel că $x = h^{-1}k^{-1}hk = (h^{-1}k^{-1}h)k\in K$ şi cum analog se arată că $x\in H$, deducem că $x\in H\cap K=\{1\}$, adică $x=1$ şi astfel $hk=kh$.

Fie acum $x\in G$. Atunci există $h\in H$, $k\in K$, unice astfel încât $x=hk$ şi definim $f:G\to H\times K$, $f(x)=(h,k)$. Dacă mai avem $x'=h'k'$ cu $h'\in H$, $k'\in K$ atunci $xx'=(hk)(h'k') = h(kh')k' = h(h'k)k' = (hh')(kk')$, de unde concluzia că $f(xx')=(hh',kk')=(h,k)(h'k')=f(x)f(x')$, adică f este morfism de grupuri. Cum în mod evident f este funcție bijectivă, deducem că f este izomorfism de grupuri, adică $G \approx H\times K$.■

Teorema 9.2.3. Fie m, n$\in\mathbb{N}$, m, n$\geq$2 şi (m, n)=1.
Atunci $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_{mn}$ (ca grupuri aditive).

Demonstrație. Fie $\mathbb{Z}_m=\{\hat{0}, \hat{1},\ldots,\widehat{m-1}\}$, $\mathbb{Z}_n=\{\bar{0}, \bar{1},\ldots, \overline{n-1}\}$ iar $\mathbb{Z}_{mn}=\{\bar{\bar{0}},\bar{\bar{1}},\ldots,\overline{\overline{mn-1}}\}$ şi $f:\mathbb{Z}_{mn}\to\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(\bar{\bar{x}})=(\hat{x},\bar{x})$ pentru orice $x\in\{0, 1, \ldots , mn-1\}$. Cum (m, n)=1 avem echivalențele

$$\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{y}} \Leftrightarrow mn\,|\,x-y \Leftrightarrow m\,|\,x-y \text{ şi } n\,|\,x-y \Leftrightarrow \hat{x}=\hat{y} \text{ şi } \bar{x}=\bar{y},$$

de unde concluzia că f este bine definită şi injectivă.

Cum $|\mathbb{Z}_m \times\mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{mn}| = mn$, deducem că f este o bijecție. Deoarece probarea faptului că f este şi morfism de grupuri aditive este imediată, deducem că f este izomorfism de grupuri.■

Corolar 9.2.4. Dacă $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 2$ sunt numere naturale astfel încât pentru $i \neq j$, $(m_i, m_j) = 1$, atunci $Z_{m_1}\times\ldots\times Z_{m_n} \approx Z_{m_1m_2\ldots m_n}$ (ca grupuri aditive).

Observația 9.2.5. Teorema 9.2.3 mai este cunoscută în literatura matematică şi sub numele de *teorema chinezească a resturilor.*

Lema 9.2.6. Dacă M şi N sunt doi monoizi astfel încât M ≈ N, atunci U(M) ≈ U(N) (ca izomorfism de grupuri).

Demonstrație. Cum M ≈ N există $f:M\to N$ izomorfism de monoizi. Dacă $x\in\mathbf{U}(M)$, atunci există $y\in M$ astfel încât xy=yx=1. Deducem că imediat că f(x)f(y)=f(y)f(x)=1, adică $f(x)\in\mathbf{U}(N)$, astfel că $\bar{f}:\mathbf{U}(M)\to\mathbf{U}(N)$, $\bar{f}=f_{|\mathbf{U}(M)}$ este corect definită. Dacă $x, y\in\mathbf{U}(M)$, atunci $xy\in\mathbf{U}(M)$ şi cum $\bar{f}(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y)$, deducem că $\bar{f}$ este morfism de grupuri. Datorită bijectivității lui f deducem imediat şi bijectivitatea lui $\bar{f}$, de unde izomorfismul de grupuri **U**(M) ≈ **U**(N).■

Lema 9.2.7. Dacă m, n$\in\mathbb{N}$, m, n $\geq$ 2 şi (m, n) = 1 atunci

$(\mathbb{Z}_m,\cdot)\times(\mathbb{Z}_n,\cdot)\approx(\mathbb{Z}_{mn},\cdot)$ (izomorfism de monoizi).

Demonstrație. Ca şi în demonstrația Teoremei 9.2.3 fie

$\mathbb{Z}_m=\{\hat{0}, \hat{1},\ldots, \widehat{m-1}\}$, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{n-1}\}$, $\mathbb{Z}_{mn} = \{\bar{\bar{0}},\bar{\bar{1}},\ldots,\overline{\overline{mn-1}}\}$

şi $f : \mathbb{Z}_{mn}\to\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(\bar{\bar{x}})=(\hat{x},\bar{x})$ pentru orice $x\in\{0,1, \ldots, mn-1\}$. Dacă mai avem $y\in\{0,1, \ldots, mn-1\}$, atunci $\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{y}} \Leftrightarrow$ mn | x-y $\Leftrightarrow$ m | x-y şi n | x-y (căci (m, n) = 1) $\Leftrightarrow$ $\hat{x}=\hat{y}$ şi $\bar{x}=\bar{y}$, de unde deducem că $f : \mathbb{Z}_{mn}\to\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(\bar{\bar{x}}) = (\hat{x},\bar{x})$ este corect definită şi injectivă. În mod evident, din $\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}}=\overline{\overline{xy}}$ deducem că

$$f(\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}}) = f(\overline{\overline{xy}}) = (\widehat{xy},\overline{xy}) = (\hat{x},\bar{x})\cdot(\hat{y},\bar{y}) = f(\bar{\bar{x}})f(\bar{\bar{y}})$$

iar $f(\bar{\bar{1}}) = (\hat{1},\bar{1}) = 1$ (în $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$), adică f este morfism de monoizi.

Cum $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = |\mathbb{Z}_{mn}| = mn$ deducem că f este surjecție, adică bijecție, deci izomorfism de monoizi.■

Corolar 9.2.8. Dacă m, n$\in\mathbb{N}$, m, n ≥ 2 şi (m, n) = 1, atunci φ(mn) = φ(m)φ(n).

Demonstraţie. Conform Lemei 9.2.7 avem izomorfismul de monoizi

$$(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times (\mathbb{Z}_n,\cdot) \approx (\mathbb{Z}_{mn},\cdot) .$$

Conform Lemei 9.2.6 avem izomorfism de grupuri $\mathbf{U}[(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times (\mathbb{Z}_n,\cdot)] \approx \mathbf{U}(\mathbb{Z}_{mn},\cdot)$. Însă $\mathbf{U}[(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times (\mathbb{Z}_n,\cdot)] = \mathbf{U}(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n,\cdot)$, de unde $\mathbf{U}(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n,\cdot) \approx \mathbf{U}(\mathbb{Z}_{mn},\cdot)$.

Totul rezultă acum din Observaţia 9.1.19 deoarece

$|\mathbf{U}(\mathbb{Z}_m,\cdot) \times \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n,\cdot)| = |\mathbf{U}(\mathbb{Z}_m,\cdot)| \cdot |\mathbf{U}(\mathbb{Z}_n,\cdot)| = \varphi(m)\varphi(n)$ iar $|\mathbf{U}(\mathbb{Z}_{mn},\cdot)| = \varphi(mn)$.■

Corolar 9.2.9. Dacă $m_1, \ldots , m_n \geq 2$ $(n \geq 2)$ iar pentru $i \neq j$, $(m_i, m_j)=1$, atunci $\varphi(m_1 m_2 \ldots m_n)=\varphi(m_1)\varphi(m_2) \ldots \varphi(m_n)$.

Corolar 9.2.10. Dacă n$\in\mathbb{N}$, n≥2 iar $n = p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}$ este descompunerea lui n în factori primi distincţi, atunci $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)$.

Demonstraţie. Deoarece pentru i≠j, $\left(p_i^{k_i}, p_j^{k_j}\right)=1$, deducem (ţinând cont de Corolarul 9.2.9) că:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_t^{k_t}\right) = \varphi\left(p_1^{k_1}\right)\ldots\varphi\left(p_t^{k_t}\right) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\ldots\left(p_t^{k_t} - p_t^{k_t-1}\right)$$

$$= p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_t}\right). \qquad ■$$

Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, prin *partiţie* a lui n înţelegem un sistem ordonat de numere naturale nenule $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ astfel încât $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k$ iar $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$; vom nota prin k_n numărul partiţiilor lui n.

Iată, pentru $n \leq 6$ toate partiţiile distincte ale lui n:

n=1 : (1) , deci $k_1=1$
n=2 : (2), (1,1) , deci $k_2=2$
n=3 : (3), (2,1), (1,1,1) , deci $k_3=3$
n=4 : (4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1) , deci $k_4=5$
n=5 : (5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1) , deci $k_5=7$
n=6 : (6), (5,1), (4,2), (4,1,1), (3,3), (3,2,1), (3,1,1,1), (2,2,2), (2,2,1,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1) , deci $k_6=11$.

Observaţia 9.2.11. 1. Din teorema de structură a grupurilor abeliene finit generate (vezi [45, p.99]) deducem că dacă p este un număr prim iar $n\in\mathbb{N}^*$ atunci există k_n tipuri de grupuri abeliene finite de ordin p^n.

2. Mai general, dacă $n = p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t}$ este descompunerea lui n în produse distincte de numere prime, atunci ţinând cont şi de Corolarul 9.2.4 deducem că numărul tipurilor de grupuri abeliene de ordin n este egal cu $k_{n_1} \ldots k_{n_t}$.

Astfel, există $k_4 = 5$ tipuri de grupuri abeliene de ordin p^4 (cu p prim):

$\mathbb{Z}_{p^4}$ - corespunzător partiţiei (4),

$\mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_p$ - corespunzător partiţiei (3,1),

$\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^2}$ - corespunzător partiţiei (2,2),

$\mathbb{Z}_p{}^2 \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ – corespunzător partiţiei (2,1,1),

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$- corespunzător partiţiei (1,1,1,1), iar dacă p şi q sunt numere prime distincte, atunci există $k_3 \cdot k_3=9$ tipuri de grupuri abeliene de ordin p^3q^3 : $\mathbb{Z}_{p^3}\times\mathbb{Z}_{q^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_{q^3}$, $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_{q^3}$, $\mathbb{Z}_{p^3}\times\mathbb{Z}_{q^2}\times\mathbb{Z}_q$, $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_{q^2}\times\mathbb{Z}_q$, $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_{q^2}\times\mathbb{Z}_q$, $\mathbb{Z}_{p^3}\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q$, $\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q$, $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_q$.

Observaţia 9.2.12. 1. Cum $4=2^2$, conform Observaţiei 9.2.11 există există două tipuri de grupuri cu 4 elemente: $\mathbb{Z}_4$ şi $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

2. Considerând K = {1, a, b, c} cu elementele multiplicându-se după regula $a^2 = b^2 = c^2 = 1$, ab = ba = c, bc = cb = a şi ca = ac = b, obţinem un grup izomorf cu $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ numit *grupul lui Klein*.

9.3. Teorema lui Cauchy pentru grupuri finite. Grupul diedral D_n de grad n. Structura grupurilor finite cu 2p elemente (p prim, p≥3)

În cadrul acestui paragraf, prin p vom desemna un număr prim (p≥2).

Teorema 9.3.1. (*Cauchy*) Dacă G este un grup finit astfel încât $p \mid |G|$, atunci există $x\in G$ astfel încât $o(x)=p$ (echivalent cu există $H\le G$ astfel încât $|H| = p$).

Demonstraţie. Cazul 1: G comutativ. Vom face inducţie matematică după cardinalul grupurilor finite G cu proprietatea că $p \mid |G|$. Dacă $|G| = p$, atunci G este ciclic şi orice element $x\in G$, $x\ne 1$, are ordinul p. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru orice grup comutativ G' cu proprietatea că $|G'|<|G|$ şi $p \mid |G'|$ şi s-o demonstrăm pentru grupul comutativ G (în ipoteza $p \mid |G|$). Pentru aceasta alegem $x\in G$, $x\ne 1$. Dacă $p \mid o(x)$, atunci $o(x)=tp$ cu $t\in\mathbb{N}^*$ iar din $x^{o(x)}=1$ deducem că $x^{tp}=1 \Leftrightarrow (x^t)^p=1$ adică $o(x^t)=p$. Dacă $p \nmid o(x)$, atunci alegem $H=\langle x\rangle=\{1, x, \ldots, x^{o(x)-1}\}$ care este subgrup normal al lui G (G fiind presupus comutativ). Dacă vom considera $G'=G/H$ atunci $|G'|=|G|:o(x)<|G|$ şi cum $p \mid |G|$ iar $(p, o(x))=1$ deducem că $p \mid |G'|$. Aplicând ipoteza de inducţie lui G' deducem că există un element $yH\in G'$ astfel încât $o(yH)=p$. Din $(yH)^p=H$ deducem că $y^pH=H$, adică $y^p\in H$, deci $y^p=x^t$ cu $1\le t\le o(x)-1$. Deducem imediat că $y^{o(x)p}=1$ şi astfel elementul $z=y^{o(x)}\in G$ va avea ordinul p.

Cazul 2: G necomutativ. Vom reduce acest caz tot la Cazul 1 iar în acest sens vom utiliza ecuaţia claselor pentru grupul G expusă în finalul paragrafului 9.1 al acestui capitol: $|G| = |Z(G)| + \sum\limits_{x\notin Z(G)}|G : C_G(x)|$ (sumarea făcându-se după elementele $x\in G \setminus Z(G)$ pentru care clasa de conjugare $[x]_\sim$ este netrivială).

Dacă există un element $x\notin Z(G)$ astfel încât $p \mid |C_G(x)|$ atunci ca şi în cazul 1 facem inducţie după |G| (aplicând ipoteza de inducţie lui $G'=C_G(x)$).

Dacă $p \nmid |C_G(x)|$ pentru orice $x\notin Z(G)$, atunci cum $|G : C_G(x)| = \dfrac{|G|}{|C_G(x)|}$ deducem că $p \mid |G : C_G(x)|$ şi cum $p \mid |G|$, din ecuaţia claselor deducem că $p \mid |Z(G)|$. Cum Z(G) este comutativ, conform Cazului 1 există un element în Z(G) (deci în G) astfel încât ordinul lui este p şi astfel teorema este complet demonstrată.■

Definiţia 9.3.2. Vom spune despre un grup G că este *p – grup* dacă ordinul oricărui element al său este o putere naturală a lui p.

Corolar 9.3.3. Dacă G este un grup finit, atunci G este p–grup dacă şi numai dacă | G | este o putere naturală a lui p.

Demonstrație. „$\Rightarrow$”. Dacă prin absurd există un număr prim q astfel încât $q \neq p$ și $q \mid |G|$, atunci conform teoremei lui Cauchy, există $x \in G$ astfel încât $o(x)=q$ contrazicând faptul că G este p – grup.

„$\Leftarrow$”. Totul rezultă din teorema lui Lagrange .■

Corolar 9.3.4. Dacă G este un p–grup finit, atunci $Z(G) \neq \{1\}$.

Demonstrație. Scriem din nou ecuația claselor pentru grupul G:

$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \notin Z(G)} |G : C_G(x)|$ (unde reamintim că suma se face după acele elemente $x \notin Z(G)$ pentru care clasele de conjugare $[x]_\sim$ sunt netriviale și diferite). Conform Corolarului 9.3.3, $|G| = p^n$ cu $n \geq 1$ iar pentru $x \notin Z(G)$ pentru care $[x]_\sim$ este netrivială avem $|G : C_G(x)| = p^m$ cu $m \geq 1$ astfel că din ecuația claselor deducem că $p \mid |Z(G)|$, adică $|Z(G)| \geq p$ și astfel Z(G) este netrivial. ■

Lema 9.3.5. Dacă G este un grup astfel încât G/Z(G) este ciclic, atunci G este comutativ.

Demonstrație. Fie $H=Z(G)$ iar $G/Z(G) = \langle xH \rangle$ cu $x \in G$. Dacă $y, z \in G$ atunci $yH=x^mH$ iar $zH=x^nH$ cu $m,n \in \mathbb{N}$, de unde $y=x^mh_1$, $z=x^nh_2$ cu $h_1,h_2 \in H=Z(G)$. Atunci $yz=x^{m+n}h_1h_2$ iar $zy=x^{n+m}h_2h_1$ și cum $h_1h_2=h_2h_1$ și $m+n=n+m$ deducem că $yz = zy$, adică G este comutativ.■

Corolar 9.3.6. Dacă G este un grup cu p^2 elemente, atunci G este comutativ.

Demonstrație. Cum $Z(G) \leq G$, $|Z(G)| \in \{1, p, p^2\}$. Conform Corolarului 9.3.4, $|Z(G)| \neq 1$ iar dacă $|Z(G)| = p^2$, atunci $G = Z(G)$, adică G este comutativ. Rămâne să analizăm doar cazul $|Z(G)|=p$. În acest caz, cum $|G / Z(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{p} = p$ iar p este prim, deducem că G/Z(G) este ciclic și conform Lemei 9.3.5 ajungem și în acest caz la concluzia că G este comutativ. ■

Definiția 9.3.7. Dacă $n \geq 1$ este un numar natural, prin *grupul diedral de grad n* **înțelegem un grup D_n cu 2n elemente generat de două elemente s și r ce satisfac conditiile: $s^2 = 1$, $r^n = 1$ și $srs = r^{-1}$. În concluzie, $|D_n| = 2n$ iar $D_n=\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$.**

Pentru interpretarea geometrică a grupului diedral D_n recomandăm cititorului excelenta monografie [45] dedicată teoriei grupurilor finite.

Teorema 9.3.8. Presupunem că p este un număr prim ≥ 3. Dacă G este un grup cu 2p elemente, atunci G este ciclic (izomorf cu $(\mathbb{Z}_{2p},+)$) sau diedral (izomorf cu D_p).

Demonstrație. Cum $|G| = 2p$ iar 2 și p sunt numere prime ($p \geq 3$) atunci (conform Teoremei 9.3.1.) există $s, r \in G$ astfel încât $s^2 = 1$ și $r^p = 1$. Considerând $H = \langle r \rangle$ avem $|H| = p$ și cum $|G:H| = \frac{2p}{p} = 2$ deducem că $H \trianglelefteq G$, astfel că $srs^{-1} \in H$, deci $srs=r^i$ cu $0 \leq i \leq p-1$.

Deducem imediat că $r^{i^2} = (r^i)^i = (srs)^i = sr^is = s(srs)s = s^2rs^2 = r$, deci $p \mid i^2-1 =(i - 1)(i +1)$. Dacă $p \mid i-1$, atunci $srs = r \Leftrightarrow sr = rs$ și atunci G va fi comutativ .

Din teorema de structură o grupurilor abeliene finit generate și teorema chinezească a resturilor deducem că $G \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_{2p}$.

Dacă $p \mid i+1$, atunci $srs=r^{-1}$ și obținem astfel descrierea grupului diedral D_p. ■

În continuare vom prezenta un rezultat ce arată în esență că pentru p – grupuri finite funcționează reciproca teoremei lui Lagrange.

Mai precis vom demonstra:

Teorema 9.3.9. Fie G un p-grup, $|G| = p^m$ cu $m\in\mathbb{N}$. Atunci pentru orice $0 \le i \le m$ există un subgrup normal G_i în G astfel încât $|G_i| = p^i$ şi $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_m = G$.

Demonstrație. Facem inducție matematică după m (afirmația fiind evidentă pentru m = 0, 1).

Să presupumen m>1 şi că afirmația din enunț este adevărată pentru orice grup G' de ordin p^{m-1} şi fie G un grup astfel încât $|G| = p^m$. Conform Corolarului 9.3.4, $Z(G)\neq\{1\}$ şi fie $z\in Z(G)$, $z\neq 1$. Cum $o(z) \mid |G| = p^m$, fie $o(z)=p^n$ cu $1 \le n \le m$ iar $G_1=\langle z^{p^{n-1}}\rangle$. Cum $z^{p^{n-1}} \neq 1$ şi $(z^{p^{n-1}})^p = z^{p^n} = 1$ deducem că $o(z^{p^{n-1}})=p$ şi astfel $|G_1|=p$. Cum $z\in Z(G)$ deducem că $G_1 \le Z(G)$ şi atunci în mod evident $G_1 \trianglelefteq G$. Alegând $G'=G/G_1$, cum $|G'| = p^m/p = p^{m-1}$ putem aplica ipoteza de inducție lui G', deci există subgrupurile $G'_0, G'_1, \ldots, G'_{m-1}$ normale în G', astfel încât $G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G'_{m-1}=G'$ şi $|G'_i| = p^i$ pentru orice $0\le i \le m-1$.

Conform teoremei de corespondență pentru grupuri avem $G'_i = G_{i+1}/G_1$ cu $G_{i+1} \trianglelefteq G$ astfel încât $G_1 \subseteq G_i$. În plus, $G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_m = G$ şi pentru orice $0 \le i \le m-1$, $|G_{i+1}|=|G'_i|\cdot|G_1|=p^i\cdot p=p^{i+1}$. Alegând $G_0=\{1\}$, subgrupurile $G_0, G_1, \ldots, G_m$ satisfac condițiile din enunțul teoremei.■

9.4. Grupuri de permutări. Teorema lui Cayley. Grupurile S_n şi A_n

Fie M o mulțime nevidă iar $\Sigma(M)=\{f\in$ **Hom**$(M) : f$ este bijectivă$\}$; în mod evident, (**Hom**$(M),\circ$) este monoid iar $\Sigma(M)$ apare acum ca grupul unităților monoidului **Hom**(M).

Convenim să numim grupul $\Sigma(M)$ ca fiind *grupul permutărilor asupra elementelor mulțimii M.*

Dacă M este o mulțime cu n elemente (exemplul clasic fiind $M=\{1, 2, \ldots, n\}$ cu $n\ge 1$), atunci grupul $\Sigma(M)$ se notează prin S_n şi se va numi *grupul permutărilor asupra unei mulțimi cu n elemente sau grup simetric de grad n.* (vom vedea mai departe că pentru grupul S_n natura elementelor mulțimii M joacă un rol secundar, numărul elementelor lui M având importanță).

Astfel, un element σ al lui S_n se va prezenta de multe ori sub forma unui tabel $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Vom nota prin e_n sau simplu prin e (dacă nu este pericol de confuzie) permutarea identică din S_n.

Tinând cont de Propoziția 7.1.11 deducem că $|S_n| = n!$.

Teorema 9.4.1. (*Cayley*) Orice grup G este izomorf cu un subgrup al grupului de permutări $\Sigma(G)$.

Demonstrație. Pentru $x\in G$ se probează imediat că $\theta_x:G\to\Sigma(G)$, $\theta_x(y)=xy$ pentru orice $y\in G$ este un element din $\Sigma(G)$. Să arătăm acum că $\varphi:G\to\Sigma(G)$, $\varphi(x)=\theta_x$ pentru orice $x\in G$ este un morfism injectiv de grupuri. Dacă $x, y\in G$ şi $\varphi(x)=\varphi(y)$, atunci $\theta_x=\theta_y$ deci în particular $\theta_x(1)=\theta_y(1) \Leftrightarrow x\cdot 1=y\cdot 1 \Leftrightarrow x=y$, de unde deducem că φ este ca funcție o injecție.

De asemenea, $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \theta_x \circ \theta_y$ iar dacă $z\in G$ avem $(\theta_x \circ \theta_y)(z) = \theta_x(\theta_y(z)) = x(yz) = (xy)z = \theta_{xy}(z)$, adică $\theta_x \circ \theta_y = \theta_{xy} = \varphi(xy)$, deci $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(xy)$, adică $\varphi\in$ **Hom** $(G, \Sigma(G))$. Deducem că $G \approx \varphi(G) \le \Sigma(G)$.■

În continuare ne vom ocupa de studiul grupului S_n cu $n \geq 2$. Evident, grupul S_2 având 2 elemente este comutativ pe când începând cu $n \geq 3$, S_n nu mai este comutativ.

Definiția 9.4.2. Numim ***ciclu de lungime k*** **($2 \leq k \leq n$) o permutare $\sigma \in S_n$ pentru care există elementele distincte $i_1, i_2, \ldots, i_k$ din $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\sigma(i_1)=i_2$, $\sigma(i_2)= i_3$, …, $\sigma(i_k)=i_1$ iar $\sigma(i)=i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.**

Convenim să notăm un astfel de ciclu σ prin $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ sau $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ (dacă există pericol de confuzie la scrierea indicilor).

Ciclii de lungime 2 se mai numesc şi *transpoziţii.*

De exemplu, în S_5 $(1\ 3\ 5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ iar $(2\ 4)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Dacă $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ este un ciclu de lungime k, convenim să numim mulţimea $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ca fiind *orbita* lui σ .

Dacă $\tau = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_t)$ este un alt ciclu de lungime t din S_n , vom spune că σ şi τ sunt *ciclii disjuncţi* dacă $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}=\emptyset$.

Propoziţia 9.4.3. Dacă σ, τ sunt ciclii disjuncţi din S_n, atunci $\sigma\tau=\tau\sigma$.

Demonstraţie. Dacă $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus (\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_t\})$, atunci $(\sigma\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = i$. Să presupunem că $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, să zicem de exemplu că $i=i_1$. Atunci $(\sigma\tau)(i)=\sigma(\tau(i))=\sigma(i)=\sigma(i_1)=i_2$, iar $(\tau\sigma)(i)=\tau(\sigma(i))=\tau(i_2)=i_2$ de unde concluzia că $(\sigma\tau)(i)=(\tau\sigma)(i)$. Analog se arată că $(\sigma\tau)(i)=(\tau\sigma)(i)$ dacă $i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$, de unde deducem egalitatea $\sigma\tau = \tau\sigma$.

În esenţă am folosit faptul că dacă $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ atunci $\tau(i)=i$ iar dacă $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$, atunci $\sigma(j)=j$.■

Observaţia 9.4.4. Deoarece pentru orice $2 \leq k \leq n$ avem $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)=(i_2\ i_3\ \ldots\ i_k\ i_1) = \ldots = (i_k\ i_1\ \ldots\ i_{k-1})$ deducem că în S_n există $\frac{1}{k} \cdot A_n^k$ ciclii distincţi de lungime k.

Propoziţia 9.4.5. Ordinul oricărui ciclu de lungime k ($2 \leq k \leq n$) este k . Dacă σ,τ sunt 2 ciclii disjuncţi de lungimi k şi respectiv t ($2 \leq k, t \leq n$), atunci $o(\sigma\tau)=[k, t]$. În particular, dacă $(k, t)=1$, atunci $o(\sigma t)=o(\sigma)\cdot o(\tau)$.

Demonstraţie. Trebuie în prima parte să demonstrăm că $\sigma^k(i)=i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $\sigma=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ este un ciclu de lungime k.

Dacă $i \in \{1,2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, atunci în mod evident $\sigma^k(i)=i$. Dacă $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, de exemplu $i = i_1$, atunci $\sigma^2(i) = \sigma(\sigma(i)) = \sigma(\sigma(i_1)) = \sigma(i_2) = i_3$, deci $\sigma^{k-1}(i) = i_k \neq i$ iar $\sigma^k(i)=i$ şi analog pentru orice $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $i \neq i_1$, de unde concluzia că $\sigma^k=e$ iar k este cel mai mic număr natural cu această proprietate, adică $o(\sigma)=k$.

Fie $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$, $\tau = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_t)$ ciclii disjuncţi de lungime k şi respectiv t ($2 \leq k, t \leq n$), $\varepsilon = \sigma\tau = \tau\sigma$, $s = [k, t]$ iar $r = o(\varepsilon)$. Va trebui să demonstrăm că $r = s$.

Deoarece $k, t \mid s$ deducem că $\varepsilon^s=e$, adică $r|s$. Cum $\varepsilon^r= e$ deducem că $\sigma^r\tau^r=e$ adică $\sigma^r=\tau^{-r}$. Dacă am avea $\sigma^r \neq e$, atunci există $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ astfel încât $\sigma^r(i) \neq i$. Cum $\sigma^r = \tau^{-r}$ deducem că şi $\tau^r(i) \neq i$, adică $i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}$ – absurd !. În concluzie $\sigma^r=\tau^r=e$, de unde deducem $k|r$ şi $t|r$. Cum $s=[k, t]$ deducem că $s|r$, adică $s=r$.■

Corolar 9.4.6. Dacă $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sunt ciclii disjuncţi doi câte doi din S_n de lungimi $t_1, \ldots, t_k$, atunci $o(\sigma_1 \ldots \sigma_k)=[t_1, \ldots, t_k]$.

Teorema 9.4.7. Orice permutare $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$ se descompune în mod unic în produs de ciclii disjuncţi (exceptând ordinea în care aceştia sunt scrişi).

Demonstrație. Fie $t=|\{ i\in\{1,2,\ldots,n\} \mid \sigma(i)\neq i \}|$; cum $\sigma\neq e$ deducem că există $i\in\{1,2.,\ldots,n\}$ astfel încât $\sigma(i)\neq i$ şi astfel şi $\sigma(\sigma(i))\neq\sigma(i)$, de unde concluzia că $t\geq 2$. Vom face acum inducție matematică după t.

Dacă t=2 totul este clar căci în acest caz σ se reduce la o transpoziție.

Să presupunem acum teorema adevărată pentru toate permutările ce schimbă efectiv mai putin de t indici şi să arătăm că dacă σ este o permutare ce schimbă efectiv t indici atunci σ se descompune în produs de ciclii disjuncți.

Alegem $i_0\in\{1, 2, \ldots,n\}$ pentru care $\sigma(i_0)\neq i_0$ şi fie $q=o(\sigma)$. Alegând $i_1=\sigma(i_0)$, $i_2=\sigma(i_1)$, … ,$i_{k+1}=\sigma(i_k)$, … se vede că $i_k=\sigma^k(i_0)$ pentru orice $k\geq 1$. Cum $\sigma^q= e$ deducem că $\sigma^q(i_0)=i_0$, deci $i_q=i_0$.

Putem alege atunci cel mai mic numar natural m cu proprietatea că $i_m=i_0$. Atunci numerele $i_0,i_1,\ldots,i_{m-1}$ sunt distincte între ele.

Într-adevăr, dacă $i_r=i_s$ cu $0\leq r, s<m$, atunci $\sigma^r(i_0)=\sigma^s(i_0)$.

Dacă r>s, notând p=r-s obținem $\sigma^p(i_0)=i_0$ şi deci $i_p=i_0$ contrazicând alegerea lui m (căci p<m).

Analog dacă r<s. Cu $i_0,i_1, \ldots ,i_{m-1}$ formăm ciclul $\tau=(i_0i_1 \ldots i_{m-1})$ şi să considerăm permutarea $\sigma' = \tau^{-1}\sigma$. Dacă avem un i astfel încât $\sigma(i)=i$, atunci $i\notin\{ i_0,i_1, \ldots , i_{m-1}\}$ şi deci $\tau^{-1}(i)=i$ de unde $\sigma'(i)=i$. Cum $i_1=\sigma(i_0)$, $i_2=\sigma(i_1)$, … , $i_0=\sigma(i_{m-1})$ deducem că pentru orice $i\in\{ i_0,i_1, \ldots ,i_{m-1}\}$ avem $\sigma'(i)=i$.

Rezultă că σ′ schimbă efectiv mai puțin de t-m elemente iar cum $m\geq 2$ atunci t-m<t, deci putem aplica ipoteza de inducție lui σ′. Rezultă atunci că putem scrie $\sigma'=\tau_2 \ldots \tau_s$ cu $\tau_2 \ldots \tau_s$ ciclii disjuncți. Punând $\tau_1=\tau$ obținem că $\sigma= \tau_1\tau_2 \ldots \tau_s$ iar τ_1 este disjunct față de ceilalți ciclii.

Din modul efectiv de descompunere de mai înainte deducem că scrierea lui σ sub forma $\sigma= \tau_1\tau_2 \ldots \tau_s$ este unic determinată.■

Observația 9.4.8. Dacă $\sigma = (i_1, i_2, \ldots ,i_k)$ este un ciclu de lungime k din S_n ($2 \leq k \leq n$), atunci se probează imediat prin calcul direct că avem următoarele descompuneri ale lui σ în produs de transpoziții:

$$\sigma = (i_1\, i_2)\, (i_2\, i_3) \ldots (i_{k-1}\, i_k) = (i_1\, i_k)\, (i_1\, i_{k-1}) \ldots (i_1 i_2).$$

Din Teorema 9.4.7 şi Observația 9.4.8 deducem imediat următorul rezultat:

Corolar 9.4.9. Orice permutare $\sigma\in S_n$ ($n \geq 2$) este un produs de transpoziții (să observăm că dacă σ = e, atunci σ = (12)(12)).

Definiția 9.4.10. Fie $\sigma\in S_n$. *Signatura lui σ* **este numărul** $\mathrm{sgn}(\sigma)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j}$ **;**
evident, $\mathrm{sgn}(\sigma)\in\{\pm 1\}$ **.**

O ***inversiune*** **a lui σ este o pereche (i j) cu $1 \leq i < j \leq n$ astfel încât σ(i) >σ(j).**

Dacă r este numărului de inversiuni ale lui σ, atunci evident $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r$

Dacă r este par spunem că σ este *permutare pară* iar dacă r este impar spunem că σ este *permutare impară* .

Vom nota prin A_n mulțimea permutărilor pare.

Astfel, $\sigma\in S_n$ este pară ⇔ sgn(σ)=1 şi impară ⇔ sgn(σ)=-1.

Propoziția 9.4.11. Dacă $\sigma, \tau\in S_n$, atunci $\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\tau)$.

Demonstrație. Avem $\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{i-j}=$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) \ \blacksquare$$

Corolar 9.4.12. Pentru orice n ≥ 2, $A_n \trianglelefteq S_n$ iar $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstrație. Din Propoziția 9.4.11 deducem că funcția sgn : $S_n \to \{\pm 1\}$ este un morfism surjectiv de la grupul $(S_n, \circ)$ la grupul multiplicativ $(\{\pm 1\}, \cdot)$.

Deoarece Ker(sgn) = $=\{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} = A_n$ deducem imediat că $A_n \trianglelefteq S_n$. Conform Teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri deducem că $S_n/A_n \approx \{\pm 1\}$, de unde concluzia că $|S_n/A_n| = 2 \Leftrightarrow |S_n| : |A_n| = 2 \Leftrightarrow |A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$.■

Observația 9.4.13. Orice transpoziție (rs) cu 1 ≤ r ≤ n este o permutare impară.

Într-adevăr, inversiunile sale sunt de forma (r, i) cu r<i<s sau (i,s) cu r<i<s astfel că numărul lor este egal cu 2(s-r)-1.

Astfel dacă $\sigma \in S_n$ şi scriem pe σ ca un produs de transpoziții $\sigma = t_1 t_2 \ldots t_m$, atunci $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(t_1)\operatorname{sgn}(t_2) \ldots \operatorname{sgn}(t_m) = (-1)^m$ şi deci σ va fi permutare pară sau impară după cum m este par sau impar.

În particular, dacă $\sigma = (i_1\ i_2\ \ldots .\ i_k)$ cum $\sigma = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)$ deducem că

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}.$$

Teorema 9.4.14. Două permutări α, $\beta \in S_n$ sunt conjugate în S_n dacă şi numai dacă ele au aceeaşi structură ciclică.

Demonstrație. „⇒”. Dacă α, β sunt conjugate în S_n, atunci există $\gamma \in S_n$ astfel încât $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Însă $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ are aceeaşi structură ciclică cu α (căci dacă $\alpha = \ldots (\ i_1\ i_2\ \ldots\ i_k) \ldots$, atunci $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \ldots (\ \gamma(i_1)\ \gamma(i_2)\ \ldots .\ \gamma(i_k)) \ldots$ de unde concluzia că α şi β au aceeaşi structură ciclică.

Faptul că $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ acționează asupra lui α de maniera descrisă mai sus se probează astfel : se descompune α în ciclii disjuncți $\alpha = c_1 c_2 \ldots c_t$ şi se observă că $\gamma\alpha\gamma^{-1} = (\gamma c_1 \gamma^{-1})(\gamma c_2 \gamma^{-1}) \ldots (\gamma c_t \gamma^{-1})$ iar dacă de exemplu $c_1 = (i_1 i_2 \ldots i_k)$, atunci $\gamma c_1 \gamma^{-1} = [\gamma(i_1 i_2)\gamma^{-1}]\,[\gamma(i_2 i_3)\gamma^{-1}] \ldots [\gamma(i_{k-1} i_k)\gamma^{-1}]$, totul reducându-se astfel la a proba de exemplu că $\gamma(i_1 i_2)\gamma^{-1} = (\gamma(i_1)\gamma(i_2)) \Leftrightarrow \gamma \circ (i_1 i_2) = (\gamma(i_1)\gamma(i_2)) \circ \gamma$.

Dacă $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ atunci $\gamma(i) \ne \gamma(i_1), \gamma(i_2)$ şi $(\gamma \circ (i_1, i_2))(i) = \gamma((i_1, i_2)(i)) = \gamma(i)$ iar $((\gamma(i_1)\gamma(i_2)) \circ \gamma)(i) = (\gamma(i_1)\gamma(i_2))(\gamma(i)) = \gamma(i)$ iar dacă de exemplu $i = i_1$ atunci $(\gamma \circ (i_1 i_2))(i_1) = \gamma((i_1 i_2)(i_1)) = \gamma(i_2)$ iar $((\gamma(i_1)\gamma(i_2)) \circ \gamma)(i_1) = (\gamma(i_1)\gamma(i_2))(\gamma(i_1)) = \gamma(i_2)$, de unde egalitatea dorită.

„⇐”. Să presupunem acum că α şi β au aceeaşi structură ciclică şi să construim γ astfel încât $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

Vom face lucrul acesta pe un exemplu concret (la general raționîndu-se analog). Să presupunem că suntem în S_5 şi avem α=(1 5)(4 2 3) şi β = (3 4)(2 1 5).

Ținând cont de felul în care acționează $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ asupra lui α deducem că: $\gamma = \begin{pmatrix} 1\,5\,4\,2\,3 \\ 3\,4\,2\,1\,5 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,4\,2)$. ■

Ținând cont de Observația 9.4.4 şi de Teorema 9.4.14, putem determina cu uşurință numărul permutărilor α din S_n de o structură ciclică dată.

De exemplu numărul de permutări din S_4 de forma (1 2)(3 4) este $\frac{1}{2}\left(\frac{4\times 3}{2}\times\frac{2\times 1}{2}\right)=3$ (factorul $\frac{1}{2}$ apărând datorită egalității (a b)(c d)=(c d)(a b) pentru {a,b,c,d}={1,2,3,4}).

Găsim astfel pentru S_4 următorul tabel de structură:

Structura ciclică	Numărul lor	Ordinul	Paritatea
(1)	1	1	pară
(12)	$\frac{4\times 3}{2}=6$	2	impare
(123)	$\frac{4\times 3\times 2}{3}=8$	3	pare
(1234)	$\frac{4!}{4}=6$	4	impare
(12)(34)	$\frac{1}{2}\left(\frac{4\times 3}{2}\times\frac{2\times 1}{2}\right)=3$	2	pare

Se observă că 1+6+8+6+3=24=4!.

Putem acum prezenta un rezultat care ne arată că reciproca teoremei lui Lagrange pentru grupuri finite este falsă.

Teorema 9.4.15. Grupul A_4 (care are ordinul 12) nu conține subgrupuri de ordin 6.

Demonstrație. Din tabelul de structură pentru S_4 deducem că A_4 constă din 8 ciclii de lungime 3, trei produse de transpoziții disjuncte și permutarea identică. Aceste elemente sunt : (1 2 3), (1 3 2), (2 3 4), (2 4 3), (3 4 1), (3 1 4), (4 1 2), (4 2 1), (1 4)(2 3), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4) și e. Să trecem acum la demonstrarea teoremei și să presupunem prin absurd că există $H\leq A_4$ astfel încât $|H|=6$. Atunci $|A_4:H|=\frac{12}{6}=2$, deci $H\trianglelefteq A_4$ astfel că pentru orice $\alpha\in H$, $\beta\alpha\beta^{-1}\in H$ pentru orice $\beta\in A_4$ (adică H va conține odată cu o permutare, oricare altă conjugată a sa prin permutări pare). Deoarece A_4 conține 8 ciclii de lungime 3 deducem că există un astfel de ciclu α cu $\alpha\in H$. Conform Teoremei 9.4.14 și Propoziției 9.1.16, α va avea 8 conjugați în S_4 astfel că $|S_4: C_{S_4}(\alpha)|=8$ (conform Propoziției 9.1.16), de unde deducem că $\left|C_{S_4}(\alpha)\right|=\frac{24}{8}=3$. În mod evident, $C_{S_4}(\alpha)=\{e, \alpha, \alpha^{-1}\}$ și cum e, α, $\alpha^{-1}\in A_4$ deducem că $|C_{A_4}(\alpha)| = 3$ deci $|A_4 : C_{A_4}(\alpha)| = \frac{12}{3}=4$. Deducem că α va avea 4 conjugați în A_4 și cum $H\trianglelefteq A_4$, cei patru conjugați ai lui α sunt în H. Tot din tabelul de structură al lui S_4 și A_4 deducem că H trebuie să conțină un element β de ordin 2 (căci dacă ar mai conține un ciclu de lungime 3 atunci ar mai conține încă 4 conjugați ai acestuia depășind numărul de 6 elemente ce am presupus a fi în H).

Deoarece β este pară avem β=(a b)(c d) astfel că până acum am descoperit 6 elemente din H: 4 ciclii de lungime 3, e și β. Deoarece $H\trianglelefteq A_4$ alegând γ=(a c b)$\in A_4$, ar trebui ca și $\gamma\beta\gamma^{-1}$=(c a)(b d) $\in$H și cum $\gamma\beta\gamma^{-1}\neq\beta$ am deduce că H conține cel puțin 7 elemente – absurd!.

Deci A_4 nu conține subgrupuri de ordin 6.■

9.5. Teoremele lui Sylow. Caracterizarea grupurilor cu pq elemente (p şi q numere prime distincte) şi 12 elemente

În cadrul acestui paragraf prin G vom desemna un grup finit. Conform teoremei lui Lagrange ordinul oricărui subgrup al lui G divide ordinul lui G. După cum am demonstrat (Teorema 9.4.15) reciproca teoremei lui Lagrange este falsă (în sensul că există grupuri finite cu proprietatea că pentru un anumit divizor al grupului respectiv grupul nu are subgrupuri de ordin egal cu acel divizor). Există în teoria grupurilor anumite rezultate pe care le vom prezenta în continuare (datorate matematicianului **L. Sylow** (1832-1918)) şi care permit să se stabilească existenţa subgrupurilor de ordin p^n ale lui G (cu p prim şi $n\in\mathbb{N}^*$) şi care dau informaţii importante despre aceste subgrupuri. Astfel, teoremele lui Sylow sunt de importanţă fundamentală în teoria grupurilor finite. Deoarece prezenta monografie nu este un tratat de teoria grupurilor vom prezenta doar enunţurile acestor teoreme, cititorul dornic de a vedea cum se demonstrează acestea putând consulta de exemplu lucrările [35], [38] sau [45] (după ce în prealabil s-a pus la punct cu anumite chestiuni legate de acţiuni ale grupurilor pe mulţimi).

Definiţia 9.5.1. Fie p un număr prim şi să presupunem că $|G| = p^m r$ cu $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}^*$ şi (p, r)=1. Numim *p- subgrup Sylow* al lui G orice subgrup al lui G de ordin p^m.

Pentru $H\leq G$ vom nota $N_G(H)=\{g\in G : gH=Hg\}$.

În mod evident avem $H\trianglelefteq N_G(H)\leq G$ şi pentru orice subgrup $K\leq G$ astfel încât $H\trianglelefteq K$ avem $K\leq N_G(H)$, deci $N_G(H)$ este cel mai mare subgrup al lui G (faţă de incluziune) ce conţine H ca subgrup normal). În particular, $H\trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(H)=G$.

Subgrupul $N_G(H)$ poartă numele de *normalizatorul* lui H în G .

Iată acum enunţul teoremelor lui Sylow:

Teorema 9.5.2. (*Prima teoremă a lui Sylow*) Pentru orice grup finit G şi orice număr prim p există un p-subgrup Sylow al lui G.

Teorema 9.5.3. (*A doua teoremă a lui Sylow*) Fie G un grup finit şi p un număr prim . Dacă H este un p-subgrup Sylow al lui G iar K este un p-subgrup al lui G, atunci există $g\in G$ astfel încât $K \leq g^{-1}Hg$. În particular, dacă K este p-subgrup Sylow al lui G, atunci $K=g^{-1}Hg$.

Teorema 9.5.4. (*A treia teoremă a lui Sylow*) Dacă notăm prin n_p numărul p-subgrupurilor Sylow distincte ale lui G, atunci $n_p = |G:N_G(H)|$ (unde H este un p-subgrup Sylow particular al lui G), n_p divide $|G:H|$ iar $n_p\equiv 1 (\text{mod } p)$.

În continuare vom prezenta câteva aplicaţii ale acestor teoreme urmând ca în finalul paragrafului să prezentăm un tabel cu caracterizarea grupurilor finite cu cel mult 15 elemente.

Teorema 9.5.5. Fie p şi q numere prime distincte, p >q şi să presupunem că $|G| = pq$.

(i) Dacă $q \nmid p-1$ atunci G este ciclic ;

(ii) Dacă $q \mid p-1$ atunci G este generat de două elemente a şi b satisfăcând condiţiile $a^q = b^p = 1$, $a^{-1}ba = b^r$ cu $r\not\equiv 1 (\text{mod } p)$ însă $r^q \equiv 1 (\text{mod } p)$.

Demonstraţie. (i). Conform teoremei lui Cauchy pentru grupuri finite, G conţine un element b de ordin p; fie $H = \langle b\rangle$. Cum H este un p-subgrup Sylow, atunci conform celei de a treia teoreme a lui Sylow numărul conjugaților lui H (adică a subgrupurilor de forma gHg^{-1} cu $g\in G$) este de forma $1+up$ cu $u\in\mathbb{N}$. Însă $1+up=|G:N_G(H)|$ şi trebuie să dividă $|G|=pq$. Cum $(1+up, p)=1$ atunci $1+up \mid q$ iar cum $q<p$ deducem că $u=0$, deci $H\trianglelefteq G$.

De asemenea, există un element $a\in G$ al cărui ordin este q; fie $K = \langle a\rangle$. Ca şi mai înainte K este q-subgrup Sylow al lui G astfel că $|G : N_G(H)|=1+kq$ cu $k\in\mathbb{N}$. Cum $1+kq \mid p$ iar prin ipoteză $q \nmid p-1$ deducem că $k=0$.

Astel $K \trianglelefteq G$, deci $G \approx H \times K \approx \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \approx \mathbb{Z}_{pq}$, deci G este ciclic în acest caz.

(ii). Să presupunem că $q \mid p-1$. Atunci K nu mai este subgrup normal în G.

Cum $H \trianglelefteq G$, $a^{-1}ba=b^r$ cu $r\in\mathbb{N}$.

Putem presupune $r\not\equiv 1 \pmod p$ (căci în caz contrar ne reântoarcem la cazul comutativ). Prin inducție se arată uşor că $a^{-j}ba^j = b^{r^j}$. În particular pentru j=q avem $b = b^{r^q}$, adică $r^q \equiv 1 \pmod p$.■

Corolar 9.5.6. Orice grup cu 15 elemente este ciclic (deci izomorf cu $(\mathbb{Z}_{15} , +)$).

Demonstrație. Totul rezultă din Teorema 9.5.5 pentru p=5 şi q=3 observând că $q=3 \nmid p-1 = 4$.■

Definiția 9.5.7. Un grup de ordin 8 având doi generatori a şi b ce satisfac relațiile $a^4=1$, $b^2=a^2$ şi $b^{-1}ab=a^{-1}$ se notează prin Q şi poartă numele de *grupul quaternionilor.*

Teorema 9.5.8. Grupurile Q şi D_4 sunt singurele grupuri necomutative de ordin 8.

Demonstrație. Dacă G este un grup necomutativ cu 8 elemente atunci G nu conține elemente de ordin 8 şi nu toate elementele sale au ordinul 2, de unde concluzia că G conține un element a de ordin 4.

Alegem $b\in G$ astfel încât $b\notin\langle a\rangle$. Cum $|G : \langle a\rangle| = 2$ deducem că $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ şi $G/\langle a\rangle \approx \mathbb{Z}_2$, de unde cu necesitate $b^2 \in\langle a\rangle$. Dacă $b^2=a$ sau $b^2=a^3$ atunci $o(b)=8$, contradicție, deci avem doar cazurile $b^2 = a^2$ sau $b^2 = 1$. Cum $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ deducem ca $b^{-1}ab \in\langle a\rangle$ iar cum $o(a^2)=2$ avem doar posibilitățile $b^{-1}ab=a$ sau $b^{-1}ab=a^3$.

Cazul $b^{-1}ab=a$ îl excludem căci el implică ab=ba, adică G este comutativ astfel că avem doar situațiile :

(i) $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ şi $b^{-1}ab=a^3 =a^{-1}$ sau

(ii) $a^4 = 1$, $b^2 = 1$ şi $b^{-1}ab=a^3 =a^{-1}$.

În cazul (i) avem descrierea lui Q (deci $G\approx Q$) iar în cazul (ii) avem descrierea lui D_4 deci ($G\approx D_4$).■

În continuare vom caracteriza grupurile finite cu 12 elemente, iar pentru aceasta avem nevoie să introducem un nou tip de grup finit.

Definiția 9.5.9. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2$ prin *grup diciclic de ordin 4n* **(notat DI_n) înțelegem un grup cu 4n elemente, $DI_n=\{1, x, \ldots, x^{2n-1}, y, xy, \ldots , x^{2n-1}y\}$ ale cărui elemente le multiplicăm astfel:**

$$x^a x^b = x^{a+b}$$
$$x^a(x^b y) = x^{a+b}y$$
$$(x^a y)\, x^b = x^{a-b}y$$
$$(x^a y)(x^b y) = x^{a-b+n}$$

unde $0 \leq a, b \leq 2n-1$ iar puterile lui x sunt considerate modulo 2n.

Se observă că pentru n=2, DI_2 = Q (grupul quaternionilor).

Suntem acum în măsură să prezentăm teorema de structură a grupurilor finite cu 12 elemente:

Teorema 9.5.10. Fie G un grup finit cu 12 elemente.

(i) Dacă G este comutativ, atunci G este izomorf cu $\mathbb{Z}_{12}$ sau $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$;

(ii) Dacă G este necomutativ atunci G este izomorf cu D_6, DI_3 sau A_4.

Demonstrație. (i). Rezultă din teorema de structură a grupurilor abeliene finit generate .

(ii). Fie t numărul subgrupurilor Sylow distincte ale lui G cu 3 elemente. Conform teoremelor lui Sylow $t\equiv 1 \pmod 3$ şi $t|4$.

Astfel, G are fie un singur subgrup de ordin 3 (care trebuie să fie subgrup normal) fie 4 subgrupuri (conjugate). Tot conform teoremelor lui Sylow deducem că G trebuie să aibă unul sau 3 subgrupuri de ordin 4.

Cazul 1. Presupunem că G conține un singur subgrup (normal) H de ordin 3 generat de x.

Dacă K este un subgrup al lui G de ordin 4 atunci K este ciclic ($K\approx\mathbb{Z}_4$) sau K este izomorf cu grupul lui Klein ($K\approx\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).

(a). Să analizăm cazul când K este ciclic, $K=\langle y\rangle$.

Cum $H\cap K=\{1\}$, atunci clasele H, Hy, Hy^2, Hy^3 sunt toate distincte şi HK=G. Cum $H\trianglelefteq G$ deducem că $yxy^{-1}\in H$.

(1) Dacă $yxy^{-1}=x$, atunci xy=yx, deci G este comutativ şi avem

$$G \approx H \times K \approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \approx \mathbb{Z}_{12}.$$

(2) Dacă $yxy^{-1}=x^2$, atunci $yx=x^2y$, de unde $y^2x=yx^2y=x^2yxy=x^4y^2=xy^2$.

Astfel, $xy^2=y^2x$ şi dacă considerăm $z=xy^2$ avem că o(z)=6.

De asemenea $z^3=x^3y^6=y^2$ şi $yz=yxy^2=y^3x=y^2x^2y=z^{-1}y$.

Cum o(y)=4, $y\notin \langle z\rangle$ şi deci clasele $\langle z\rangle$, $\langle z\rangle y$ dau o partiție a lui G.

Multiplicând în acest caz elementele lui G ca în cazul grupului diciclic şi anume $z^az^b=z^{a+b}$, $z^a(z^by)=z^{a+b}y$, $(z^ay)z^b=z^{a-b}y$, $(z^ay)(z^by)=z^{a-b}y^2= z^{a-b+3}$ (unde puterile lui z se reduc modulo 6) obținem în acest caz că $G\approx DI_3$.

(b). Să presupunem că K este grupul lui Klein (deci $K\approx\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) şi să notăm elementele sale cu 1,u,v,w unde w=uv şi $u^2=v^2=1$. Atunci $H\cap K=\{1\}$ iar clasele H, Hu, Hv, Hw partiționează pe G, de unde HK=G. Cum $H\trianglelefteq G$ avem $uxu^{-1}=x^a$, $vxv^{-1}=x^b$, $wxw^{-1}=x^{ab}$ unde a, b, $ab\in\{\pm 1\}$.

(3) Dacă a=b=ab=1, cum G este abelian, $G\approx H\times K \approx \mathbb{Z}_3 \times\mathbb{Z}_2 \times\mathbb{Z}_2\approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

(4) Să considerăm cazul când două dintre a, b, ab sunt egale cu –1 iar al treilea egal cu 1. Renumerotând u, v, w (dacă este necesar) putem presupune că a = 1 şi b = -1. Atunci ux=xu iar z=ux are ordinul 6. Astfel, $G=\langle z,v\rangle$ iar $z^6=1, v^2=1$ iar $vz=z^{-1}v \Leftrightarrow vzv=z^{-1}$ de unde concluzia că în acest caz $G\approx D_6$.

Cazul 2. Să presupunem că G conține 4 subgrupuri (conjugate) de ordin 3. Elementele nenule (diferite de 1) ale celor 4 subgrupuri de ordin 3 ne dau 8 elemente diferite de 1 ale lui G restul de 4 urmând a forma singurul subgrup K de ordin 4 al lui G.

(c). Să arătăm că grupul K nu poate fi ciclic.

Presupunem prin absurd că totuşi K este ciclic, $K=\langle y\rangle$ şi fie $x\in G\backslash K$. Atunci o(x)=3 iar clasele K, Kx şi Kx^2 dau o partiție a lui G. Cum $K\trianglelefteq G$ avem că $xyx^{-1}\in K$. Dacă $xyx^{-1}=y$, atunci ar rezulta că G este comutativ (în contradicție cu faptul că G conține 4 subgrupuri conjugate distincte de ordin 3). De asemenea $xyx^{-1}\neq y^2$ (căci y şi y^2 au ordine diferite).

În sfârşit, dacă am avea $xyx^{-1}=y^3$, atunci $y=x^3yx^{-3}=y^{27}=y^3$, absurd, de unde concluzia că grupul K nu este ciclic.

(d). Atunci K trebuie să fie grupul lui Klein. Considerând ca mai sus $K=\{1, u, v, w\}$, fie $x\in G$ astfel încât $o(x)=3$. Atunci clasele K, Kx, Kx^2 sunt toate distincte astfel că $G=\langle u, v, x\rangle$. Conjugarea prin x permută cele 3 elemente u, v, w între ele (căci $K\trianglelefteq G$) iar permutarea este sau identică sau un 3-ciclu (deoarece $x^3=1$).

(5) Nu putem avea permutarea identică căci în acest caz G ar deveni comutativ (caz studiat deja).

(6) Renumerotând eventual, putem presupune că $xux^{-1}=v$, $xvx^{-1}=w$, $xwx^{-1}=u$ şi atunci considerând asocierile $u\leftrightarrow(12)(34)$, $v\leftrightarrow(13)(24)$, $x\leftrightarrow(234)$ obținem un izomorfism între G şi A_4. În concluzie avem 5 tipuri de grupuri cu 12 elemente, 2 comutative ($\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$) şi 3 necomutative ($D_6$, DI_3 şi A_4).■

Suntem acum în măsură să prezentăm tabelul de caracterizare a grupurilor cu cel mult 15 elemente:

Ordinul grupului	**Nr. tipuri**	**Reprezentanți**	**Rezultatul care dă caracterizarea**
2	1	$\mathbb{Z}_2$	Propoziția 9.1.20
3	1	$\mathbb{Z}_3$	Propoziția 9.1.20
4	2	$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	Corolarul 9.3.6 şi Observația 9.2.11
5	1	$\mathbb{Z}_5$	Propoziția 9.1.20
6	2	$\mathbb{Z}_6$, D_3	Teorema 9.3.8.
7	1	$\mathbb{Z}_7$	Propoziția 9.1.20
8	5	3 tipuri comutative : $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 2 tipuri necomutative: Q , D_4	Observația 9.2.11, Teorema 9.5.8.
9	2	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$	Corolarul 9.3.6 şi Observația 9.2.11.
10	2	$\mathbb{Z}_{10}$, D_5	Teorema 9.3.8.
11	1	$\mathbb{Z}_{11}$	Propoziția 9.1.20
12	5	2 comutative: $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$ 3 necomutative : D_6, DI_3, A_4	Observația 9.2.11, Teorema 9.5.10.
13	1	$\mathbb{Z}_{13}$	Propoziția 9.1.20
14	2	$\mathbb{Z}_{14}$, D_7	Terorema 9.3.8.
15	1	$\mathbb{Z}_{15}$	Corolar 9.5.6.

Capitolul 10

COMPLEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

10.1. Determinantul unei matrice. Formulele Cauchy-Binet şi Laplace

În cadrul acestui paragraf prin A vom desemna un inel comutativ şi unitar.

Definiția 10.1.1. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ şi $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(A)$, atunci prin *determinantul matricei M* notat det(M) înțelegem elementul

$$\mathbf{det(M)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\in \mathbf{A}$$

(unde prin S_n am notat mulțimea permutărilor asupra mulțimii {1, 2, …, n} iar pentru $\sigma\in S_n$, sgn(σ) reprezintă *signatura* permutării σ).

Convenim să notăm **det**(M)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (sau condensat, **det**(M)=$|a_{ij}|_{1\leq i,j\leq n}$).

Asociind la fiecare $M\in \mathbf{M}_n(A)$ elementul **det**(M)∈A, obținem o funcție **det**:$\mathbf{M}_n(A)\to A$ numită *funcția determinant*.

Produsul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ poartă numele de *termen* al lui **det**(M). Astfel, **det**(M) este suma a n! termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ apar în **det**(M) cu semnul + iar $\frac{n!}{2}$ cu semnul - .

Dacă n=1, adică $M=(a_{11})$ convenim să definim **det**(M)=a_{11}.

În cele ce urmează vom pune în evidență principalele proprietăți ale determinanților.

Propoziția 10.1.2. Pentru orice $M\in M_n(A)$, det(^tM)=det(M) (unde prin ^tM am notat transpusa matricei M).

Demonstrație. Fie $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ şi $^tM=(^ta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ unde prin $^ta_{ij}$ am notat elementul a_{ji}. Avem **det**(^{t}M)= $\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,{}^ta_{1\sigma(1)}{}^ta_{2\sigma(2)}\ldots{}^ta_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\ldots a_{\sigma(n)n}=$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))}\ldots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}=\sum_{\sigma^{-1}\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}=$$

=**det**(M) (deoarece atunci când σ parcurge S_n şi σ^{-1} parcurge bijectiv pe S_n iar sgn(σ^{-1})= =sgn(σ)). ■

Observația 10.1.3. Egalitatea **det**(^{t}M)=**det**(M) ne arată că ori de câte ori avem o proprietate adevărată referitoare la liniile unui determinant, aceeaşi proprietate este adevărată şi pentru coloanele determinantului. Din această cauză în continuare vom prezenta principalele proprietăți ale determinanților referitoare la linii, rezultând tacit că acestea sunt adevărate şi pentru coloane.

Propoziția 10.1.4. (i) Dacă toate elementele unei linii dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;

(ii) Dacă într-o matrice schimbăm două linii între ele, matricea astfel obținută are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale;

(iii) Dacă o matrice are două linii identice, atunci determinatul său este nul;

(iv) Dacă toate elementele unei linii a unei matrice conțin factor comun un element a∈A, atunci acel element poate fi scos în fața determinantului matricei;

(v) Dacă elementele a două linii ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul său este nul.

Demonstrație. (i). Dacă de exemplu, toate elementele de pe linia i a matricei M sunt egale cu 0, atunci cum fiecare termen al determinantului conține ca factor şi un element al liniei i deducem că **det**(M)=0.

(ii). Fie M_{ij} matricea ce se obține din matricea $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ schimbând între ele liniile i şi j. Avem **det**(M_{ij})= $\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{j\sigma(i)}...a_{i\sigma(j)}...a_{n\sigma(n)}$

Dacă considerăm transpoziția ε=(i j) (ce duce pe i în j, pe j în i şi lasă pe loc restul elementelor din {1, 2, …, n}) atunci putem scrie

$$\mathbf{det}(M_{ij})=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1(\sigma\circ\varepsilon)(1)}a_{2(\sigma\circ\varepsilon)(2)}...a_{n(\sigma\circ\varepsilon)(n)}=-\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}...a_{n\tau(n)}=-\mathbf{det}(M)$$

(deoarece atunci când σ parcurge pe S_n, $\sigma\circ\varepsilon=\tau$ parcurge bijectiv pe S_n iar $\mathrm{sgn}(\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\varepsilon)=-\mathrm{sgn}(\sigma)$).

(iii). Dacă matricea M are identice liniile i şi j, atunci schimbând între ele aceste linii trebuie după (ii) ca **det**(M)=-**det**(M), de unde deducem că **det**(M)=0 (evident în ipoteza că inelul A nu este de caracteristică 2).

(iv). Fie $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ iar M′ matricea ce diferă de M prin aceea că în locul liniei (a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in}) are linia (aa_{i1}, aa_{i2}, …, aa_{in}). Atunci

$$\mathbf{det}(M')=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...(aa_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}=a\cdot\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}=a\cdot\mathbf{det}(M).$$

(v). Rezultă imediat din (iv) şi (iii). ■

Fie acum $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathbf{M_n}(A)$ şi să presupunem că elementele liniei i se scriu sub forma $a_{ij}=a_{ij}'+a_{ij}''$ pentru fiecare $1\le j\le n$.

Dacă notăm cu M′ (respectiv M″) matricea care se obține din M înlocuind elementele de pe linia i cu elementele (a_{ij}') (respectiv (a_{ij}'')) ($1\le j\le n$) atunci avem următorul rezultat:

Propoziția 10.1.5. det(M)=det(M′)+det(M″).

Demonstrație. Avem **det**(M)= $\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}=$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...(a'_{i\sigma(i)}+a''_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a'_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}+$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}....a''_{i\sigma(i)}..a_{n\sigma(n)}=\mathbf{det}(M')+\mathbf{det}(M'').\ \blacksquare$$

Corolar 10.1.6. (i) Dacă o linie a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii, atunci determinantul matricei este nul;

(ii) Dacă la o linie a unei matrice pătratice adăugăm o combinație liniară de alte linii, determinantul matricei nu se schimbă.

Observația 10.1.7. Sintetizând proprietățile de mai sus ale determinanților avem următoarele proprietăți principale ale determinanților:

Proprietatea 1: Dacă într-un determinant schimbăm liniile cu coloanele, determinantul nu-şi modifică valoarea.

Proprietatea 2: Dacă toate elementele unei linii a unui determinant sunt nule, atunci şi determinantul este nul.

Proprietatea 3: Dacă într-un determinant schimbăm două linii între ele, determinantul îşi schimbă doar semnul.

Proprietatea 4: Într-un determinant factorii comuni se scot pe linii.

Proprietatea 5: Dacă într-un determinant două linii sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.

Proprietatea 6: Dacă toate elementele unei linii a unui determinant se scriu ca sumă de două elemente atunci şi determinantul se scrie ca sumă de doi determinanţi.

Proprietatea 7: Dacă o linie a unui determinant este o combinaţie liniară de celelelte linii, atunci determinantul este nul.

Proprietatea 8: Dacă într-un determinant la o linie adăugăm o combinaţie liniară de alte linii, atunci determinantul nu-şi schimbă valoarea.

În continuare vom prezenta un procedeu recursiv de calcul al unui determinant de ordinul n prin care calculul acestuia se reduce la calculul a n determinanţi de ordinul n-1.

Fie deci $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in \mathbf{M_n}(A)$ $(n\ge 2)$ şi $d=\mathbf{det}(M)=|a_{ij}|_{1\le i,j\le n}$.

Definiţia 10.1.8. Numim *minor complementar* al elementului a_{ij} în det(M) elementul notat d_{ij} ce se obţine calculând determinantul de ordinul n-1 obţinut prin eliminarea din det(M) a liniei i şi coloanei j $(1\le i, j\le n)$.

Elementul $\delta_{ij}=(-1)^{i+j}d_{ij}$ se numeşte *complementul algebric* al lui a_{ij} în det(M).

Teorema 10.1.9. Dacă $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(A)$, atunci pentru orice $1\le i\le n$ avem egalitatea:

$$\mathbf{det}(M)=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}.$$

Demonstraţie. Avem $\mathbf{det}(M)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ şi să notăm pentru $1\le i\le n$, $s_i=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}$.

Ideea de demonstraţie a egalităţii $\mathbf{det}(M)=s_i$ este următoarea: vom arăta că fiecare termen de forma $a_{ij}\delta_{ij}$ al sumei s_i este suma a (n-1)! termeni din dezvoltarea lui **det**(M) având acelaşi semn ca şi cei din dezvoltarea lui **det**(M) iar pentru două valori diferite ale indicelui j avem termeni diferiţi din dezvoltarea lui **det**(M). O dată stabilit lucrul acesta, egalitatea $\mathbf{det}(M)=s_i$ se probează astfel: suma s_i are $n\cdot(n-1)!=n!$ termeni identici şi cu acelaşi semn ca şi termenii ce ne dau dezvoltarea lui **det**(M), deci cu necesitate $\mathbf{det}(M)=s_i$.

Să ne ocupăm la început de termenul $a_{11}\delta_{11}$.

Avem $a_{11}\delta_{11}=a_{11}\sum_{\tau}\mathrm{sgn}(\tau)a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}=\sum_{\tau}\mathrm{sgn}(\tau)a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ (sumarea făcându-se după toate permutările τ asupra mulţimii {2, 3, …, n}). Se observă că cei (n-1)! termeni ce apar în dezvoltarea lui $a_{11}\delta_{11}$ sunt termeni ce apar şi în dezvoltarea lui **det**(M).

Să arătăm că aceştia apar cu acelaşi semn ca şi în dezvoltarea lui **det**(M). Pentru o permutare τ asupra mulţimii {2, 3, …, n} semnul termenului $a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ din dezvoltarea lui δ_{11} este sgn(τ), deci semnul termenului $a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ este egal cu sgn(τ).

Pe de altă parte, semnul termenului $a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ în dezvoltarea lui **det**(M) este egal cu sgn(τ′) unde $\tau'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ 1 & \tau(2) & \tau(3) & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix}$ şi avem în mod evident sgn(τ)=sgn(τ′).

Pentru cazul general al produsului $a_{ij}\delta_{ij}$ procedăm astfel: schimbăm liniile şi coloanele în aşa fel încît elementul a_{ij} să vină în locul elementului a_{11} şi minorul d_{ij} să rămînă neschimbat. În felul acesta linia i şi coloana j devin linia 1 şi respectiv coloana 1; linia 1 devine linia 2, linia 2 devine linia 3, …, linia i-1 devine linia i; coloana 1 devine coloana 2, coloana 2 devine coloana 3,…, coloana j-1 devine coloana j, astfel că dacă notăm prin d' determinantul obţinut prin astfel de schimbări avem **det**(M)=$(-1)^{i+j}d'$ şi în plus $d'_{11}=d_{ij}$.

Dacă $a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{i-1\ k_{i-1}}a_{i+1\ k_{i+1}}...a_{nk_n}$ este un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{ij} din egalitatea **det**(M)=$(-1)^{i+j}d'$ şi ţinând cont de prima parte a demonstraţiei deducem că semnul termenului $(-1)^{i+j}a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{i-1\ k_{i-1}}a_{ij}a_{i+1\ k_{i+1}}...a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ este acelaşi cu cel dat de dezvoltarea determinantului d.

Astfel, demonstraţia teoremei este completă. ■

Corolar 10.1.10. Dacă $1\leq i\neq j\leq n$, atunci $a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=0$.

Demonstraţie. Conform Teoremei 10.1.9 avem

$(\star)$ $\det(M)=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}$.

Deoarece δ_{i1}, δ_{i2} ,…, δ_{in} nu conţin elementele a_{i1}, a_{i2},…, a_{in}, egalitatea $(\star)$ este de fapt o identitate în a_{i1}, a_{i2},…, a_{in} . Astfel, $a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}$ va fi un determinant ce are linia i formată din elementele a_{j1}, a_{j2},…,a_{jn} şi cum $j\neq i$ avem atunci două linii identice (linia j şi linia i), de unde deducem că $a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=0$ (conform Proprietăţii 5). ■

Sumând cele stabilite anterior, avem următorul rezultat important:

Teorema 10.1.11. Dacă $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(A)$, atunci pentru orice $1\leq i,\ j\leq n$ avem

$$a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=\begin{cases}\det(M) & pentru\ \ j=i\\ 0 & pentru\ \ j\neq i\end{cases}.$$

În continuare vom prezenta o generalizare a celor stabilite în Teorema 10.1.11 ce ne dă dezvoltarea unui determinant după o linie. Mai precis vom prezenta o regulă de dezvoltare a unui determinant după mai multe linii (aşa zisa *regulă a lui Laplace*).

Înainte de a enunţa regula lui Laplace vom defini noţiunile de *minor de ordin k* ($k\leq n-1$), *minor complementar* şi *complement algebric* pentru un minor complementar de ordin k (care generalizează de fapt noţiunile definite mai înainte).

Să alegem o matrice $M\in \mathbf{M}_n(A)$ ($n\geq 2$) şi să fixăm k linii i_1, i_2,…, i_k şi k coloane j_1, j_2,…, j_k ($k\leq n-1$) distincte.

Elementele ce se află la intersecţia liniilor i_1, i_2,…, i_k şi coloanelor j_1, j_2,…, j_k fomează o matrice de ordinul k al cărei determinant îl vom nota prin $M^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$ şi îl vom numi *minor de ordin k* pentru **det**(M).

Dacă eliminăm din matricea iniţială liniile i_1, i_2,…, i_k şi coloanele j_1, j_2,…, j_k obţinem o matrice pătratică de ordin n-k al cărei determinant îl vom nota prin $\overline{M}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$ şi îl vom numi *minorul complementar* al lui $M^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$.

Convenim de asemenea să notăm $\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k\\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k\end{bmatrix}=\sum\limits_{t=1}^{k}(i_t+j_t)$. Numărul $A^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}=(-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k\\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k\end{bmatrix}}\cdot\overline{M}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$ se va numi *complementul algebric* al lui $M^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$.

Observăm că pentru k=1 obţinem noţiunile prezentate în Definiţia 10.1.8.

Exemplu. Fie matricea M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\in M_4(\mathbb{Z})$.

Să alegem liniile $i_1=2$, $i_2=4$ şi coloanele $j_1=1$, $j_2=2$ (deci k=2).

Avem $M_{12}^{24} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\overline{M}_{12}^{24} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 9$, deci $A_{12}^{24} = (-1)^9 \overline{M}_{12}^{24} = -(-5) = 5$.

Să observăm că dacă fixăm k linii, cu elementele acestora putem forma C_n^k minori de ordin k.

Suntem acum în măsură să prezentăm *regula lui Laplace:*

Teorema 10.1.12. (***Laplace***). **Dacă** $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(A)$ **şi fixăm liniile** $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$ **(k≤n-1), atunci**

$$\mathbf{det}(M) = \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n} M_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k} \cdot A_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k} \quad \textbf{(o sumă de } C_n^k \textbf{ termeni).}$$

Demonstrație. În esență, ideea de demonstrație este asemănătoare cu cea de la demonstrația Teoremei 10.1.11 cu deosebirea că este ceva mai elaborată.

Observăm că pentru $1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n$, $M_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$ este o sumă de k! termeni iar $A_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$ este o sumă de (n-k)! termeni astfel că dacă notăm cu S suma din partea dreaptă a egalității din enunț atunci S va fi o sumă de $k!\cdot(n-k)!\cdot C_n^k = n!$ termeni.

Dacă vom arăta că cei n! termeni ce formează pe S sunt de fapt termeni distincți din dezvoltarea lui **det**(M) (şi cu acelaşi semn ca în **det**(M)) atunci în mod evident avem egalitatea din enunț **det**(M)=S.

Să considerăm la început cazul $i_1=j_1=1$, $i_2=j_2=2$, …, $i_k=j_k=k$.

Atunci $M_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{k\sigma(k)}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{bmatrix} = 2(1+2+\ldots+k) = k(k+1), \text{ deci}$$

$A_{12\ldots k}^{12\ldots k} = (-1)^{k(k+1)} \cdot \overline{M}_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \overline{M}_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \sum_{\tau\in S_k'} \mathrm{sgn}(\tau) a_{k+1\ \tau(k+1)} \ldots a_{n\tau(n)}$ (unde prin S'_k am notat mulțimea permutărilor asupra elementelor k+1, k+2, …, n) astfel că

$$M_{12\ldots k}^{12\ldots k} \cdot A_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \sum_{\substack{\sigma\in S_k \\ \tau\in S_k'}} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \mathrm{sgn}(\tau)\cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{k\sigma(k)} a_{k+1\ \tau(k+1)} \ldots a_{n\tau(n)}.$$

Dacă notăm $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(k) & \tau(k+1) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$, atunci în mod evident $\mathrm{sgn}(\varepsilon)=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\tau)$, astfel că termenii sumei $M_{12\ldots k}^{12\ldots k} \cdot A_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ fac parte din termenii lui **det**(M) şi apar cu acelaşi semn ca şi în dezvoltarea lui **det**(M).

Căutăm acum să probăm un rezultat similar pentru un produs general de forma $M_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k} \cdot A_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$. Permutând succesiv liniile şi coloanele vecine putem aduce minorul $M_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$ în colțul din stânga sus al determinantului **det**(M); pentru aceasta sunt necesare $(i_1-1) + (i_2-2) + \ldots + (i_k-k) + (j_1-1) + (j_2-2) + \ldots + (j_k-k) = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix} - k\cdot(k+1)$ permutări de linii şi coloane.

Dacă notăm prin N matricea astfel obținută avem că $\mathbf{det}(N) = (-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}} \cdot \mathbf{det}(M)$, $M_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k} = N_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ iar $\overline{M}_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k} = \overline{N}_{12\ldots k}^{12\ldots k}$. Din cele demonstrate anterior, în **det**(N) suma tuturor termenilor ale căror prime k elemente intră în minorul $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ este egală cu produsul $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$. De aici rezultă că suma termenilor corespunzători ai lui **det**(M) este egală cu produsul $(-1)^{\left[\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{smallmatrix}\right]} \cdot M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} = M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k} \cdot A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată. ∎

Exemplu. Fie matricea M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\in M_4(\mathbb{Z})$.

Să calculăm **det**(M) dezvoltându-l cu ajutorul regulii lui Laplace după liniile 1 şi 2. Avem

det(M)= $M^{12}_{12}A^{12}_{12} + M^{12}_{13}A^{12}_{13} + M^{12}_{14}A^{12}_{14} + M^{12}_{23}A^{12}_{23} + M^{12}_{24}A^{12}_{24} + M^{12}_{34}A^{12}_{34} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^6 \cdot 3 + 1\cdot(-1)^7 \cdot 2 + 1\cdot(-1)^8 \cdot 0 + 1\cdot(-1)^8 \cdot 1 + 2\cdot(-1)^9 \cdot (-6) + (-1)\cdot(-1)^{10} \cdot (-4) =$$
$$= -3 - 2 + 1 + 12 + 4 = 12.$$

Corolar 10.1.13. Dacă M, N$\in$M$_n$(A), atunci det(M·N)=det(M)·det(N) (adică aplicaţia det:M$_n$(A)→A este morfism de monoizi multiplicativi).

Demonstraţie. Alegem $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $N=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi considerăm matricea P$\in$**M$_{2n}$**(A), P= $\begin{pmatrix} M & O_n \\ -I_n & N \end{pmatrix}$ al cărui determinant îl calculăm în două moduri:

Pe de o parte, cu ajutorul regulei lui Laplace dezvoltăm pe **det**(P) după primele n linii şi obţinem **det**(P)=**det**(M)·$(-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{smallmatrix}\right]}$·**det**(N)=**det**(M)·**det**(N).

Pe de altă parte, pentru fiecare $1\le j\le n$ în **det**(P) facem următoarele operaţii: înmulţim coloana 1 cu b_{1j}, pe a doua cu b_{2j}, …, pe a n-a cu b_{nj} şi ce obţinem adunăm la coloana n+j, obţinând astfel pentru **det**(P) următoarea formă: **det**(P)=**det**(P′), unde P′ este matricea $\begin{pmatrix} M & M\cdot N \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$.

Dezvoltând acum pe **det**(P) după ultimele n coloane obţinem: **det**(P)= =**det**(M·N)·$(-1)^{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \end{smallmatrix}\right]}$·**det**(-I$_n$)=**det**(M·N)·$(-1)^{1+2+\dots+2n}\cdot(-1)^n$ =**det**(M·N)·$(-1)^{n(2n+1)+n}$ =**det**(MN), de unde deducem egalitatea **det**(M·N)=**det**(M)·**det**(N). ∎

În continuare vom prezenta o formulă de calcul a produsului a două matrice (aşa zisa *formulă Binet-Cauchy*).

Fie m, n$\in\mathbb{N}^*$ astfel încât m≤n. Dacă $1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le n$, prin $S_m(j_1, \dots, j_m)$ notăm mulţimea permutărilor mulţimii $\{j_1, \dots, j_m\}$ (în particular $S_m=S_m(1, 2, \dots, m)$).

Să considerăm acum M$\in$**M$_{m,n}$**(A) şi N$\in$**M$_{n,m}$**(A).

Cum M·N$\in$**M$_m$**(A) are sens să vorbim despre **det**(M·N).

În continuare vom face pregătirile în vederea stabilirii unei formule de calcul pentru det(M·N).

Pentru orice $k_1, \ldots, k_m \in \{1, 2, .., n\}$ (nu neapărat distincte) notăm cu $M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m}$ (respectiv $N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet}$) matricea de tip (m, m) având m coloane (respectiv m linii) egale în ordine cu coloanele (respectiv liniile) de indici $k_1, \ldots, k_m$ ale matricei M (respectiv N).

Să considerăm $k_1, \ldots, k_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $k_i \neq k_j$ pentru $i \neq j$ şi fie $j_1, \ldots, j_m$ o rearanjare a elementelor $k_1, \ldots, k_m$ astfel încât $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$. Atunci $(k_1, \ldots, k_m)$ este o permutare din $S_m(j_1, \ldots, j_m)$ şi există o unică permutare $\sigma \in S_m$ astfel încât $k_i = j_{\sigma(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$.

Definim *semnul permutării* $(k_1,\ldots,k_m)$ ca fiind $\varepsilon(k_1,\ldots, k_m)=\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Ţinând cont de notaţiile precedente avem:

(1) $\mathbf{det}(N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet}) = \varepsilon(k_1, \ldots, k_m)\cdot\mathbf{det}(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$ (şi o relaţie analoagă pentru $\mathbf{det}(M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m})$).

Astfel, putem scrie:

(2) $\mathbf{det}(M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m}) = \sum\limits_{(k_1,\ldots,k_m)\in S_m(j_1,\ldots,j_m)} \varepsilon(k_1,\ldots,k_m) a_{1k_1} \ldots a_{mk_m}$ (şi o egalitate analoagă pentru $\mathbf{det}(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$).

Cu notaţiile introduse mai sus avem:

Teorema 10.1.14. ***(Binet-Cauchy).*** **Fie m, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m \leq n$. Atunci pentru oricare două matrice $M \in \mathbf{M}_{m,n}(A)$ şi $N \in \mathbf{M}_{n,m}(A)$ are loc egalitatea:**

$$\mathbf{det}(M\cdot N) = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n} \mathbf{det}(M_{\bullet, j_1, \ldots, j_m})\cdot\mathbf{det}(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$$

Demonstraţie. Dacă notăm $P=M\cdot N=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathbf{M}_m(A)$ atunci

$$\mathbf{det}(M\cdot N) = \mathbf{det}(P) = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in S_m} \varepsilon(i_1,\ldots,i_m) c_{1i_1} \ldots c_{mi_m} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in S_m} \varepsilon(i_1,\ldots,i_m) \left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 i_1} \right) \ldots \left(\sum_{k_m=1}^{n} a_{mk_m} b_{k_m i_m} \right)$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m\in\{1,2,\ldots,n\}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \left(\sum_{(i_1,\ldots i_m)\in S_m} \varepsilon(i_1,\ldots i_m) b_{k_1 i_1} \ldots b_{k_m i_m} \right)$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\in\{1,2,\ldots,n\} \\ k_i\neq k_j \text{ pentru } i\neq j}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \cdot \mathbf{det}(N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet})$$

(am ţinut în ordine cont de definiţia unui determinant, de faptul că un determinant cu două linii identice este nul ca şi de (1) şi (2)).

Grupând termenii cu $\{k_1, \ldots, k_m\}=\{j_1, \ldots, j_m\}$ pentru $1\leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq m$ arbitrar fixaţi obţinem:

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\in\{1,2,\ldots,n\} \\ k_i\neq k_j \text{ pentru } i\neq j}} a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \cdot \mathbf{det}(N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet}) =$$

$$= \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n} \mathbf{det}(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})\cdot\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_m)\in S_m(j_1,\ldots,j_m)} \varepsilon(k_1,\ldots,k_m) a_{1k_1} \ldots a_{mk_m} \right) =$$

$$= \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n} \mathbf{det}(M_{\bullet, j_1, \ldots, j_m})\cdot\mathbf{det}(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet}),$$

de unde rezultă egalitatea din enunţ.∎

Observaţia 10.1.15. Dacă în formula Binet-Cauchy considerăm m=n, atunci obţinem că dacă M, $N \in \mathbf{M}_n(A)$, atunci $\mathbf{det}(M\cdot N)=\mathbf{det}(M)\cdot\mathbf{det}(N)$, adică ceea ce obţinusem şi în Corolarul 10.1.13.

În continuare vom prezenta şi alte aplicaţii ale formulei Binet-Cauchy.

Să considerăm în locul inelului A corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Pentru $M \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ vom nota prin $\overline{M}$ matricea ce se obține din M înlocuind fiecare element al lui M prin conjugatul său. În mod evident ${}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$ şi vom nota $M^* = {}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$. Dacă M este o matrice pătratică (adică m=n) atunci ținând cont de definiția lui **det**(M) deducem imediat că $\mathbf{det}(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$ şi astfel

$$\mathbf{det}(M \cdot \overline{M}) = \mathbf{det}(M) \cdot \mathbf{det}(\overline{M}) = \det(M) \cdot \overline{\det(M)} = |\det(M)|^2 \geq 0$$

(cu egalitate dacă **det**(M)=0). Analog deducem că și $\mathbf{det}({}^tM \cdot M) \geq 0$.

Corolar 10.1.16. Dacă m, n$\in\mathbb{N}^*$ şi m$\leq$n, atunci pentru orice matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\det(M \cdot M^*)$ este un număr real iar $\det(M \cdot M^*) \geq 0$ (egalitatea are loc dacă şi numai dacă pentru orice $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$ avem $\det(M_{\cdot}, j_1, \ldots, j_m) = 0$).

Demonstrație. Aplicăm formula Binet-Cauchy matricelor M şi $N = {}^t\overline{M} = M^*$ şi obținem:

$$\mathbf{det}(M \cdot {}^t\overline{M}) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} \mathbf{det}\,(M_{\cdot}, j_1, \ldots, j_m) \cdot \mathbf{det}({}^t\overline{M}\ j_1, \ldots, j_m, \cdot) =$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} \mathbf{det}\,(M_{\cdot}, j_1, \ldots, j_m) \cdot \mathbf{det}\,({}^t\overline{M}_{\cdot}, j_1, \ldots, j_m) \geq 0. \blacksquare$$

Corolar 10.1.17. Dacă m, n$\in\mathbb{N}^*$ şi m$\leq$n, atunci pentru orice matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ are loc inegalitatea $\det(M \cdot {}^tM) \geq 0$.

Mai mult, egalitatea are loc dacă şi numai dacă pentru orice $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$ avem $\det(M_{\cdot}, j_1, \ldots, j_m) = 0$.

Corolar 10.1.18. Fie m, n$\in\mathbb{N}^*$ cu m>n. Atunci pentru orice două matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $N \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ are loc egalitatea $\det(M \cdot N) = 0$.

Demonstrație. Considerăm matricele $\widetilde{M}$, $\widetilde{N} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ care se obțin din M, respectiv N, prin adăugarea la sfîrşit a m-n>0 coloane, respectiv linii, ale căror elemente sunt toate nule. Se observă că $M \cdot N = \widetilde{M} \cdot \widetilde{N}$ şi atunci

$$\mathbf{det}(M \cdot N) = \mathbf{det}(\widetilde{M} \cdot \widetilde{N}) = \mathbf{det}(\widetilde{M}) \cdot \mathbf{det}(\widetilde{N}) = 0 \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Corolar 10.1.19. (*Fischer*) Dacă $M \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este o matrice pentru care există $N \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ cu $\det(M \cdot N) \neq 0$, atunci cu necesitate m$\leq$n.

Corolar 10.1.20. (*Identitatea lui Lagrange*) Fie n$\geq$2 un număr natural. Atunci pentru orice a_i, b_i, x_i, $y_i \in \mathbb{C}$ cu $1 \leq i \leq n$ are loc identitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) \cdot (x_i y_j - x_j y_i).$$

În particular pentru $x_i = \overline{a_i}$ şi $y_i = \overline{b_i}$, $1 \leq i \leq n$ obținem forma complexă a identității lui Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j - a_j b_i|^2 .$$

Demonstrație. Aplicăm formula lui Binet-Cauchy pentru M= $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ şi N= $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$.■

Corolar 10.1.21. (***Cauchy-Bouniakovski-Schwartz***) **Dacă $n\geq 2$ este un număr natural, atunci pentru orice a_i, $b_i\in\mathbb{C}$ cu $1\leq i\leq n$ avem inegalitatea:**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda\in\mathbb{C}$ astfel încât $a_i=\lambda\cdot b_i$ pentru $1\leq i\leq n$.

Demonstrație. Totul rezultă din forma complexă a identității lui Lagrange.■

Corolar 10.1.22. Fie m, $n\in\mathbb{N}^*$ cu $2\leq m\leq n$. Atunci, pentru oricare două matrice $M\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $N\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ şi orice $\lambda\in\mathbb{C}$ are loc egalitatea:

$$\lambda^{n-m}\cdot\mathbf{det}(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=\mathbf{det}(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).$$

Demonstrație. Să demonstrăm la început egalitatea din enunț pentru m=n iar pentru aceasta fie polinomul

$$\mathbf{det}(M\cdot N+ +\lambda\cdot I_n)= \lambda^n+\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda^{n-k}\in\mathbb{C}[\lambda].$$

Aplicând formula Binet-Cauchy deducem că pentru orice $1\leq k\leq n$ avem:

$$a_k=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\mathbf{det}\,[(MN)\ i_1, i_2,\ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k]$$

$$=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\mathbf{det}\,[(M\ i_1, i_2, \ldots, i_k, \bullet)\cdot(N\ \bullet, i_1, i_2,\ldots, j_k)]$$

$$=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\Big(\sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_k\leq n}\mathbf{det}\,(M\ i_1, i_2,\ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k)\cdot\mathbf{det}\,(N\ j_1, j_2,\ldots, j_k, i_1, i_2, \ldots, i_k)\Big).$$

Schimbând ordinea de sumare în ultima expresie deducem imediat că aceasta este simetrică în M şi N de unde deducem că efectuând un calcul similar celui de mai înainte pentru $\mathbf{det}(N\cdot M+\lambda\cdot I_n)$ obținem acelaşi rezultat, de unde egalitatea:

$$\mathbf{det}(M\cdot N+\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).$$

Dacă m<n considerăm matricele pătratice $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}\in\mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ care se obțin din M, respectiv N prin adăugarea la sfârşit a n-m linii, respectiv coloane, ale căror elemente sunt toate nule.

Conform formulei lui Laplace avem $\lambda^{n-m}\cdot\mathbf{det}(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=\mathbf{det}(\widetilde{M}\cdot\widetilde{N}+\lambda\cdot I_n)$ şi conform cazului m=n avem că $\mathbf{det}(\widetilde{M}\cdot\widetilde{N}+\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}(\widetilde{N}\cdot\widetilde{M}+\lambda\cdot I_n)$, de unde egalitatea:

$$\lambda^{n-m}\cdot\mathbf{det}(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=\mathbf{det}(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).\ ■$$

Corolar 10.1.23. Fie m, $n\in\mathbb{N}^*$ cu $1\leq m<n$. Atunci pentru orice două matrice $M\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $N\in M_{n-m,n}(\mathbb{C})$, matricea P= $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$ verifică inegalitatea:

$$|\mathbf{det}(P)|^2\leq\mathbf{det}(M\cdot M^*)\cdot\mathbf{det}(N\cdot N^*).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $\lambda\in\mathbb{C}$ astfel încât pentru orice $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n$ şi $1\leq j'_1<j'_2<\ldots<j'_{n-m}\leq n$ cu $\{j_1, \ldots, j_m\}\cup\{j'_1, \ldots, j'_{n-m}\}=\{1, 2, \ldots, n\}$ avem:

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+j_1+\ldots+j_m}\cdot \mathbf{det}\,(\mathbf{M}\ _{\bullet},\ \mathbf{j}_1,\ \ldots,\ \mathbf{j}_m) = \lambda\cdot\mathbf{det}\,(\mathbf{N}\ _{\bullet},\ \mathbf{j}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{j}'_{n-m}).$$

Demonstrație. Conform formulei lui Laplace aplicată matricei $P=\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ obținem:

$$|\mathbf{det}(P)| = \Big|\sum_{\substack{1\le j_1<\ldots<j_m\le n\\ 1\le j'_1<\ldots<j'_{n-m}\le n\\ j_k\ne j'_t\ pentru\ k\ne t}} (-1)^{1+\ldots+m+j_1+\ldots+j_m}\cdot\mathbf{det}(M\ _{\bullet},\ j_1,\ldots,j_m)\cdot\mathbf{det}(N\ _{\bullet},\ j'_1,\ldots,j'_{n-m})\Big| \le$$

$$\le \Big[\Big(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le n}|\mathbf{det}(M\ _{\bullet},\ j_1,\ldots,j_m)|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{1\le j'_1<\ldots<j'_{n-m}\le n}|\mathbf{det}(N\ _{\bullet},\ j'_1,\ldots,j'_{n-m})|^2\Big)\Big]^{1/2} =$$

$=[\mathbf{det}(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*)]^{1/2}$, de unde deducem imediat că

$$|\mathbf{det}(P)| \le [\mathbf{det}(M\cdot M^*)\cdot\mathbf{det}(N\cdot N^*)]^{1/2},$$

care prin ridicare la pătrat în ambii membrii ne dă inegalitatea cerută.

Condiția de egalitate rezultă din Corolarul 10.1.22.■

Corolar 10.1.24. Fie m, n, m_1, $m_2\in\mathbb{N}$ astfel încât $2\le m\le n$, m_1, $m_2\ge 1$ şi $m_1+m_2=m$. Dacă $P\in\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este partiționată sub forma $P=\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ cu şi $M\in M_{m_1,n}(\mathbb{C})$ şi $N\in M_{m_2,n}(\mathbb{C})$, atunci $\det(P\cdot P^*)\le\det(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*)$.

Demonstrație. Dacă m=n atunci afirmația din enunț este adevărată conform Corolarului 10.1.23.

Dacă $\mathbf{det}(P\cdot P^*)=0$, atunci afirmația din enunț este adevărată conform Corolarului 10.1.16.

Rămîne de studiat doar cazul în care m<n şi $\mathbf{det}(P\cdot P^*)>0$. Există atunci un vector $V\in\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $V\cdot V^*=1$ şi $P\cdot V^*=0$.

De aici deducem că $\det\left[\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}^*\right]=\mathbf{det}(P\cdot P^*)>0$.

Raționând inductiv deducem existența unei matrice $X\in\mathbf{M}_{n-m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $X\cdot X^*=I_{n-m}$ şi $P\cdot X^*=0$. Aplicând Corolarul 10.1.24. matricei pătratice $\widetilde{P}=\begin{pmatrix} P \\ X \end{pmatrix}$ partiționată sub forma $\widetilde{P}=\begin{pmatrix} \widetilde{M} \\ \widetilde{N} \end{pmatrix}$ cu $\widetilde{M}=M$ şi $\widetilde{N}=\begin{pmatrix} N \\ X \end{pmatrix}$ deducem că

$$\mathbf{det}(P\cdot P^*)=\mathbf{det}(\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}^*)\le\mathbf{det}(\widetilde{M}\cdot\widetilde{M}^*)\cdot\mathbf{det}(\widetilde{N}\cdot\widetilde{N}^*)=\mathbf{det}(M\cdot M^*)\cdot\mathbf{det}(N\cdot N^*).\ ■$$

Corolar 10.1.25. Considerând maticea $P\in\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ cu $2\le m\le n$ şi partiționând-o sub forma $P=\begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}$ cu $M_i\in\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ pentru $1\le i\le n$ avem:

$$\mathbf{det}(P\cdot P^*)\le\mathbf{det}(M_1\cdot M_1^*)\cdot\mathbf{det}(M_2\cdot M_2^*)\cdot\ldots\cdot\mathbf{det}(M_m\cdot M_m^*).$$

Observația 10.1.26. Considerând $P=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ din Corolarul 10.1.25 deducem că

$$|\det(P)|^2\le\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right),$$

inegalitate ce poartă numele lui *Hadamard*.

Ținând cont de Corolarul 10.1.25 deducem că în inegalitatea lui Hadamard avem egalitate dacă şi numai dacă pentru oricare $1\leq i, j\leq n$ avem:

$$a_{i_1}a_{j_1}+...+a_{i_n}a_{j_n}=\begin{cases}1 & pentru\ i=j\\ 0 & pentru\ i\neq j\end{cases}.$$

Observația 10.1.27. Chestiunile legate de formula Binet-Cauchy şi aplicațiile sale au fost redactate utilizând în cea mai mare parte lucrarea [16].

10.2. Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar. Teorema Cayley–Hamilton. Ridicarea la putere a unei matrice pătratice

Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune n iar $B=\{e_1,\ldots, e_n\}\subset V$ o bază a sa. O aplicație liniară $f : V\to V$ se mai numeşte şi *operator liniar*.

Vom nota prin $M_f\in \mathbf{M_n}(K)$ matricea ataşată lui f relativă la perechea de baze (B, B).

Definiția 10.2.1. Un scalar $\lambda\in K$ se zice *valoare proprie* pentru operatorul f dacă există $x\in V$, $x\neq 0$ (ce se va numi *vector propriu* pentru f corespunzător lui λ) astfel încât $f(x)=\lambda x$.

Să observăm că egalitatea $f(x)=\lambda x$ din definiția de mai sus este echivalentă cu egalitatea $M_f\cdot\tilde{x}=\lambda\cdot\tilde{x}\Leftrightarrow(M_f-\lambda\cdot I_n)\cdot\tilde{x}=\tilde{0}$ (unde reamintim că pentru $x = (x_1, \ldots, x_n)\in \mathbf{M_{1,n}}(K) =K^n$, prin $\tilde{x}$ am notat $\tilde{x}={}^t x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in \mathbf{M_{n,1}}(K)$), astfel că existența vectorului propriu x este echivalentă cu condiția ca sistemul omogen $(M_f-\lambda\cdot I_n)\cdot\tilde{x}=\tilde{0}$ să admită soluție nebanală, de unde cu necesitate condiția ca $\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)=0$. Să presupunem că $P_f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$ cu $a_1,\ldots,a_n\in K$ şi să considerăm polinomul $P_f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\in K[X]$ care se va numi *polinomul caracteristic* al lui f.

Deoarece $a_n=(-1)^n\neq 0$ deducem că polinomul caracteristic P_f este un polinom de grad n cu coeficienți în K. În aparență rădăcinile lui P_f depind de baza inițială B a lui V. Dacă mai avem în V o altă bază $B'=\{e'_1, \ldots, e'_n\}\subset V$ atunci dacă notăm prin $N\in\mathbf{M_n}(K)$ matricea de trecere de la B la B', atunci N este inversabilă iar dacă notăm prin M_f' matricea ataşată lui f relativă la noua pereche de baze (B', B'), atunci $M_f'=N^{-1}\cdot M_f\cdot N$. Atunci $\mathbf{det}(M_f'-\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}(N^{-1}\cdot M_f\cdot N-\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}[N^{-1}\cdot(M_f-\lambda\cdot I_n)\cdot N]=\mathbf{det}(N^{-1})\cdot\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)\cdot\mathbf{det}(N) = \mathbf{det}(N^{-1})\cdot\mathbf{det}(N)\cdot\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)=\det(N^{-1}\cdot N)\cdot\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}(I_n)\cdot\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)=\mathbf{det}(M_f-\lambda\cdot I_n)$, de unde concluzia că rădăcinile lui P_f nu depind de alegerea bazei B.

Lema 10.2.2. Dacă pentru o valoare proprie $\lambda\in K$ notăm prin V_λ mulțimea vectorilor proprii corespunzători lui λ, atunci V_λ este un subspațiu vectorial al lui V.

Demonstrație. Fie $x, y\in V_\lambda$ şi $\alpha, \beta\in K$. Avem $f(x)=\lambda x$ şi $f(y)=\lambda y$ astfel că $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha(\lambda x)+\beta(\lambda y)=\lambda(\alpha x+\beta y)$, de unde concluzia că $\alpha x+\beta y \in V_\lambda$, adică V_λ este un subspațiu vectorial al lui V (ce se va numi *subspațiu propriu al lui f corespunzător valorii proprii λ*). ■

Observația 10.2.3. Unui vector propriu x îi corespunde o singură valoare proprie λ.

Într-adevăr, dacă mai avem $\lambda'\in K$ astfel încât $f(x)=\lambda'x$, cum $f(x)=\lambda x$, deducem că $\lambda'x=\lambda x \Leftrightarrow (\lambda'-\lambda)x=0$ şi cum $x\neq 0$ cu necesitate $\lambda'-\lambda=0$, adică $\lambda'=\lambda$.

Rezumând cele expuse mai sus, deducem că:

(i).Valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile polinomului caracteristic P_f ;

(ii).Vectorii proprii corespunzători unei valori proprii $\lambda\in K$ sunt soluţii ale sistemului omogen $\left(M_f-\lambda\cdot I_n\right)\cdot\widetilde{x}=\widetilde{0}$.

Teorema 10.2.4. Vectorii proprii ai operatorului f corespunzători la valori proprii distincte două câte două sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Facem inducţie matematică după numărul m al valorilor proprii distincte două câte două ($m\leq n$). Pentru m=1 teorema este evidentă. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m\in K$ valori proprii ale lui f distincte două câte două iar $x_1, \ldots, x_m$ vectorii proprii corespunzători. Dacă prin absurd există $\alpha_1, \ldots, \alpha_m\in K$ nu toţi nuli astfel încât ($\star$) $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_m x_m = 0$ deducem că $\alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_m f(x_m) = 0$ sau

$$(\star\star)\ (\alpha_1\lambda_1)x_1+\ldots+(\alpha_m\lambda_m)x_m = 0.$$

Să presupunem de exemplu că $\alpha_1\neq 0$.

Din ($\star$) şi ($\star\star$) deducem imediat că $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)x_1+\ldots+\alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x_m = 0$.

Conform ipotezei de inducţie deducem că $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)=\ldots=\alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m) = 0$.

În particular $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m) = 0$ şi cum $\lambda_1\neq\lambda_m$ deducem cu necesitate $\alpha_1 = 0$, absurd!. ■

Corolar 10.2.5. Dacă operatorul liniar $f:V\to V$ are n valori proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincte două câte două, atunci vectorii proprii corespunzători $x_1,\ldots, x_n$ formează o nouă bază B′, astfel că matricea lui f relativă la baza B′ va fi

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Astfel, dacă alegem pentru $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ câte un vector propriu $x_1, \ldots,x_n$ din $V_{\lambda_1},\ldots,V_{\lambda_n}$ şi notăm prin N matricea pătratică de ordin n formată din coordonatele lui $x_1, \ldots,x_n$, atunci deducem că

$$N^{-1}\cdot M_f\cdot N=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow M_f=N\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}\cdot N^{-1}.$$

Spunem în acest caz că am *diagonalizat* pe M.

Observaţia 10.2.6. Dacă matricea ataşată operatorului $f:V\to V$ faţă de o bază $B=\{e_1,\ldots, e_n\}$ este matricea diagonală $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$, atunci $e_1, \ldots, e_n$ sunt vectori proprii iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii corespunzătoare pentru f.

Într-adevăr, dacă $\lambda\in K$ este o valoare proprie oarecare a lui f atunci notând cu x vectorul propriu corespunzător, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in K$ nu toate nule astfel încât $f(x)=\lambda x$ şi x

$=\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Atunci $f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) \Leftrightarrow \lambda x = \alpha_1(\lambda_1 e_1) + \ldots + \alpha_n(\lambda_n e_n)$ $\Leftrightarrow \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cdot \lambda_i)\cdot e_i$, de unde cu necesitate $\lambda\cdot\alpha_i = \lambda_i\cdot\alpha_i$ pentru orice $1\le i\le n$. Cum printre elementele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ există cel puțin unul nenul (căci $x\neq 0$), deducem cu necesitate că există $1\le i\le n$ astfel încât $\lambda = \lambda_i$.

Teorema 10.2.7. (***Cayley-Hamilton***) **Fie $A\in M_n(K)$ iar $P_f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\in K[X]$ polinomul caracteristic al lui A. Atunci $a_0 I_n + a_1A + \ldots + a_nA^n = O_n$, unde O_n este matricea pătratică nulă de ordin n din $M_n(K)$ (altfel zis, $P_f(A)=O_n$).**

Demonstrație. Există o infinitate de valori ale lui $\lambda\in K$ pentru care $P_f(\lambda)=\mathbf{det}(A-\lambda\cdot I_n) \neq 0$. Pentru astfel de valori ale lui λ, matricea $A-\lambda\cdot I_n$ este inversabilă iar

$$(A-\lambda\cdot I_n)^{-1} = \frac{1}{P_f(\lambda)}(A-\lambda\cdot I_n)^* \Leftrightarrow (\star)\ (A-\lambda\cdot I_n)(A-\lambda\cdot I_n)^* = P_f(\lambda)I_n.$$

Ținând cont de felul în care se calculează $(A-\lambda\cdot I_n)^*$ deducem că $(A-\lambda\cdot I_n)^* = B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$ cu $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}\in \mathbf{M_n}(K)$ astfel că $(\star)$ devine

$$(A-\lambda\cdot I_n)(B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = P_f(\lambda)I_n$$

sau $(\star\star)$ $AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB_2 - B_1)\lambda^2 + \ldots + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n =$

$$= a_0 I_n + a_1 I_n\lambda + \ldots + a_n I_n\lambda^n.$$

Deoarece $(\star\star)$ este valabilă pentru o infinitate de valori ale lui λ deducem cu necesitate egalitățile:

$$\begin{aligned}
&AB_0 = a_0 I_n\\
&AB_1 - B_0 = a_1 I_n\\
&AB_2 - B_1 = a_2 I_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I_n\\
&- B_{n-1} = a_n I_n
\end{aligned}$$

Din aceste utime egalități deducem că:

$a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n =$
$= AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \ldots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + A^n(-B_{n-1})$
$= AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \ldots + A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = O_n$. ■

10.3. Aplicații ale teoremei Cayley-Hamilton

10.3.1. Calculul inversei unei matrice nesingulare

Scriind egalitatea $a_0I_n + a_1A + \ldots + a_nA^n = O_n$ din Teorema Cayley–Hamilton sub forma $-a_0I_n = A(a_1I_n + a_2A \ldots + a_nA^{n-1})$, dacă $a_0 = P_f(0) = \mathbf{det}(A)\neq 0$ atunci putem trage concluzia că $A^{-1} = -\left[(a_0^{-1}a_1)I_n + (a_0^{-1}a_2)A + \ldots + (a_0^{-1}a_n)A^{n-1}\right]$, obținând astfel o altă metodă de calcul a inversei unei matrice nesingulare din $\mathbf{M_n}(K)$. Ca un exemplu practic, cu ajutorul teoremei Cayley-Hamilton să calculăm inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, avem că $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 3$, deci conform teoremei Cayley-Hamilton avem $-A^3 + 2A^2 + 4A + 3I_3 = O_3 \Leftrightarrow A(\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A - \frac{4}{3}I_3) = I_3$, de unde concluzia că $A^{-1} = \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A - \frac{4}{3}I_3 = \begin{pmatrix} -4/3 & -5/3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2/3 & 4/3 & -1 \end{pmatrix}$.

10.3.2. Ridicarea la putere a matricelor pătratice

Fie $n \geq 2$, K un inel comutativ şi $A \in M_n(K)$.

Se pune problema găsirii acelor metode care să ne permită să caracterizăm pentru un număr natural k pe A^k.

O primă metodă ar fi de a calcula A^2, A^3, …şi de a vedea dacă nu cumva acest fapt ne sugerează forma lui A^k, urmând ca apoi să demonstrăm prin inducție matematică forma lui A^k.

Iată un exemplu practic: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$. Observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ iar apoi $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ astfel că ni se sugerează faptul că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k \end{pmatrix}$.

Scriind că $A^{k+1} = A^k \cdot A$ deducem că $a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1}$ iar $b_{k+1} = b_k + 2b_{k-1}$, pentru orice $k \geq 2$.

Folosind metoda inducției matematice deducem că $a_k = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3}$ şi $b_k = -\frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}$ pentru orice $k \geq 1$.

De data acesta a fost o întâmplare fericită găsirea lui A^k!

În cazul în care n este destul de mare iar A oarecare şansele de a găsi expresia lui A^k prin metoda de mai sus sunt reduse!.

Să încercăm alte metode.

Fie de data aceasta K un corp comutativ. Să presupunem că matricea $A \in M_n(K)$ are n valori proprii distincte $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Conform Corolarului 10.2.5 există $B \in M_n(K)$ astfel încât $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Deducem atunci că $A = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$ şi astfel pentru $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Ca aplicație să calculăm A^k pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

Prin calcul (vezi exercițiul 10.77, (iv)) se deduce imediat că valorile şi subspațiile vectorilor proprii corespunzători vectorilor proprii ai lui A sunt

$\lambda_1 = 1$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, 1, 1) : \alpha\in\mathbb{C}\}$,

$\lambda_2 = \varepsilon$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(3+2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 3+3\varepsilon) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ şi

$\lambda_3 = \varepsilon^2$ cu $X_{\lambda_3} = \{\alpha(3+2\varepsilon^2, 2+3\varepsilon^2, 3+3\varepsilon^2) : \alpha\in\mathbb{C}\}$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Astfel, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3+2\varepsilon & 3+2\varepsilon^2 \\ 1 & 2+3\varepsilon & 2+3\varepsilon^2 \\ 1 & 3+3\varepsilon & 3+3\varepsilon^2 \end{pmatrix}$, deci pentru k natural avem

$A^k = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^k & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}B^{-1}$ (restul calculelor pentru găsirea formei finale le lăsăm pe seama cititorului).

O altă metodă recurentă ne este oferită tot de teorema Cayley-Hamilton .

Pentru $A \in M_n(K)$ există $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ astfel încât

(*) $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I_n$, I_n fiind matricea unitate.

Trebuie deci să ştim cum arată $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ căci datorită lui (*) găsim A^n.

Apoi $A^{n+1} = a_{n-1}A^n + \ldots + a_1A^2 + a_0A$, $A^{n+2} = a_{n-1}A^{n+1} + \ldots + a_1A^3 + a_0A^2$, ş.a.m.d.

Şi în cazul acestei metode calculele sunt destul de laborioase.

Să descriem efectiv cazul n = 2.

Pentru început vom prezenta câteva considerații asupra şirurilor recurente de ordinul doi.

Teorema 10.3.1. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pentru care există două numere reale a şi b, cu a ≠ 1 astfel încât $x_n = ax_{n-1} + b$, pentru orice n ≥ 2, atunci $x_n = a^{n-1}x_1 + \frac{a^{n-1}-1}{a-1}b$, pentru orice n≥1.

Demonstrație. Avem $x_n = ax_{n-1} + b$ de unde deducem $x_{n-1} = ax_{n-2} + b$ iar apoi $x_n - x_{n-1} = a(x_{n-1} - x_{n-2}) = a^2(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = a^{n-2}(x_2 - x_1)$, pentru orice n≥2. Deci

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (x_2 - x_1) \\ x_3 - x_2 &= a(x_2 - x_1) \\ x_4 - x_3 &= a^2(x_2 - x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - x_{n-1} &= a^{n-2}(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste ultime egalități obținem $x_n = a^{n-1}x_1 + \frac{a^{n-1}-1}{a-1}b$, pentru orice n≥1 ■.

Observație. Dacă a = 1, $x_n = x_1 + (n-1)b$.

Teorema 10.3.2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale pentru care există două numere reale a şi b, cu a ≠ 1 astfel încât $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, pentru orice n ≥ 2, atunci $x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} x_1 - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} x_0$, pentru orice n≥2, unde α, β sunt rădăcinile ecuației $x^2 = ax + b$ (numită *ecuația caracteristică* ataşată şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Demonstrație. Scriem relația de recurență sub forma $x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0$ în care înlocuim $a = \alpha + \beta, b = -\alpha\beta$.

Obținem $x_n - \alpha x_{n-1} - \beta x_{n-1} + \alpha\beta x_{n-2} = 0 \Leftrightarrow x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2})$.

Dacă punem $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$ pentru orice n≥1, obținem $y_n = \beta y_{n-1}$ pentru orice n≥2.

Raționând inductiv găsim $y_n = \beta^{n-1} y_1$, pentru orice n ≥ 1, adică $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1} y_1$. Dacă pentru orice n∈ℕ punem $x_n = \beta^n z_n$ atunci $\beta z_n - \alpha z_{n-1} = y_1$ sau $z_n = \frac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}$.

Conform Teoremei 10.3.1 avem $z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta}$, pentru orice n≥1, de unde deducem imediat că $x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} x_1 - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} x_0$, pentru orice n≥1 ■.

Observație. Dacă $\alpha = \beta$, atunci în loc de $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ vom scrie $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + ... + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}$ şi analog $\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + ... + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}$.

După aceste considerații teoretice vom prezenta ridicarea la putere a matricelor de ordinul doi.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice pătratică de ordinul doi cu a, b, c, d ∈ ℝ, iar $\Delta_A = ad - bc$.

Prin calcul direct deducem că ecuația caracteristică a lui A este $x^2-(a+d)x + \Delta_A = 0$, deci conform teoremei lui Cayley-Hamilton avem că $A^2 - (a+d)A + \Delta_A \cdot I_2 = O_2$.

Teorema 10.3.3. Dacă $\Delta_A = 0$ atunci pentru orice număr natural n ≥ 1, $A^n = (a+d)^{n-1} \cdot A$.

Demonstrație. Cum $\Delta_A = 0$, atunci $A^2 = (a+d) \cdot A$ şi rezultă imediat că $A^n = (a+d)^{n-1} \cdot A$. ■

Teorema 10.3.4. Pentru orice număr natural n ≥ 1, există numerele reale x_n şi y_n astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$, *$I_2$* fiind matricea unitate de ordinul doi.

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție matematică.

Pentru n = 1 avem $x_1 = 1$ şi $y_1 = 0$.

Avem $A^2 = (a+d) \cdot A - \Delta_A \cdot I_2$, de unde deducem $x_2 = a + d, y_2 = -\Delta_A$.

Să presupunem că pentru orice număr natural n, există numerele reale x_n şi y_n astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ şi să demonstrăm că în această ipoteză există numerele reale x_{n+1} şi y_{n+1} astfel încât $A^{n+1} = x_{n+1} \cdot A + y_{n+1} \cdot I_2$.

Avem $A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A =$
$= x_n \cdot (x_2 \cdot A + y_2 \cdot I_2) + y_n \cdot A = (x_2 x_n + y_n) + y_2 x_n \cdot I_2$.

Deci putem lua (**) $\quad x_{n+1} = x_2 x_n + y_n, y_{n+1} = y_2 x_n$. ■

Aplicații.

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice pătratică de ordinul doi, n∈ℕ, n≥2, iar λ_1, λ_2 rădăcinile ecuației $\lambda^2 - (a+d)\lambda + \Delta_A = 0$, a, b, c, d∈ℝ.

(i) dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $A^n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot A - \Delta_A \cdot \dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot I_2$.

(ii) dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci $A^n = n\lambda^{n-1} \cdot A - (n-1)\Delta_A \cdot \lambda^{n-2} \cdot I_2$.

Soluție. Conform Teoremei 10.3.4, există numerele reale x_n şi y_n astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$. Obținem astfel şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce verifică relațiile de recurență (**).

Din a doua relație a lui (**) deducem că $x_{n+1} = x_2 x_n + y_2 x_{n-1}$, pentru orice n ≥ 2, iar $y_{n+1} = y_2 x_n$, pentru orice n ≥ 2, cu $x_1 = 1, x_2 = a+d, y_1 = 0, y_2 = -\Delta_A$.

În cazul şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avem relația de recurență $x_{n+1} = x_2 x_n + y_2 x_{n-1}$, pentru orice n ≥ 2 cu $x_1 = 1, x_2 = a+d$.

Definind pentru o matrice A, $A^0 = I_2$, deducem că putem lua $x_0 = 0$ şi $y_0 = 1$.

Ecuația caracteristică ataşată şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este

$$\lambda^2 = x_2 \cdot \lambda + y_2 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d) \cdot \lambda + \Delta_A = 0.$$

Conform Teoremei 10.3.2, deducem că dacă λ_1, λ_2 sunt rădăcinile acestei ecuații, atunci

$$x_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot x_1 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot x_0 = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$y_n = -\Delta_A \cdot x_{n-1} = -\Delta_A \cdot \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi $x_n = n\lambda^{n-1}, y_n = -(n-1)\Delta_A \cdot \lambda^{n-2}$, dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

2. Să se demonstreze că $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$.

Soluție. Ecuația caracteristică $\lambda^2 - (a+d) \cdot \lambda + \Delta_A = 0$ devine în acest caz $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$.

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^n - \left(\sqrt{2}\right)^n \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^n}{2i} = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right),$$ deci conform aplicației 1, (i), putem scrie

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}-2\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4}\\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4}\end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}^n$.

Soluție. Ecuația caracteristică $\lambda^2-(a+d)\cdot\lambda+\Delta_A=0$ de la aplicația 1, devine în acest caz $\lambda^2-5\lambda+6=0$ cu rădăcinile $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

Astfel $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}^n=\frac{2^n-3^n}{2-3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-6\cdot\frac{2^{n-1}-3^{n-1}}{2-3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n & 2\cdot 3^n-2^{n+1}\\ 2^n-3^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{pmatrix}.$$

10.4. Derivata unui determinant

Fie $a_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcții derivabile pe $\mathbb{R}$, i, j $\in$ {1, 2, ..., n} iar $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$a(x)=\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{vmatrix},\ x\in\mathbb{R}.$$

Teorema 10.4.1. Funcția a(x) este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

(***) $$a'(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a'_{j1}(x) & a'_{j2}(x) & \dots & a'_{jn}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}$$ **, pentru orice x$\in\mathbb{R}$.**

Demonstrație. Faptul că funcția a(x) este derivabilă pe $\mathbb{R}$ rezultă din aceea că se obține prin operații elementare cu funcțiile $a_{ij}(x)$, i,j $\in$ {1, 2, ..., n} care sunt presupuse derivabile.

Să probăm acum şi relația (***).

Avem că a(x)= $\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)...a_{n\sigma(n)}(x)$, pentru orice x$\in\mathbb{R}$. Din aceasta, prin derivare deducem că a′(x)= $\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)...a'_{j\sigma(j)}(x)...a_{n\sigma(n)}(x)$, adică tocmai relația cerută.

Aplicații.

1. Să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \sin(\beta) & \sin(\gamma) \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix},$$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

unde α, β, γ, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Evident f este derivabilă şi conform relației (***) putem scrie:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum $f'(x)=0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f(x) este constantă pe $\mathbb{R}$, deci

$$f(x) = f(0) = \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \sin(\beta) & \sin(\gamma) \\ \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix},$$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Să se demonstreze că x = 1 este rădăcină dublă pentru f(x).

Soluție. Se observă că $f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, iar

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 20x^3 & 12x^2 & 6x & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^5 & x^4 & x^3 & 1 \\ 5x^4 & 4x^3 & 3x^2 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

deci dacă x = 1, f(1) = f ′(1) = 0, adică x = 1 este rădăcină dublă pentru f(x).

Capitolul 11 : Exerciții propuse (enunțuri)

Capitolele 1-5

(1-5).1. Fie a, b, $c\in\mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că $\{x\in\mathbb{Q} : ax^2+bx+c=0\}=\emptyset$.

(1-5).2. Să se arate că nu există un număr finit de numere raționale $r_1, \ldots, r_n$ astfel încât orice număr $x\in\mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x=x_1r_1+\ldots+x_nr_n$ cu $x_i\in\mathbb{Z}$, $1\leq i\leq n$.

(1-5).3. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Să se arate că $[a, b]\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ şi $[a, b]\cap\mathbf{I}\neq\emptyset$.

(1-5).4. Să se determine $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât rădăcinile ecuației

$$kx^2+(2k-1)x+k-2=0 \text{ să fie raționale.}$$

(1-5).5. Dacă a, b, c, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, ($a, b, c\geq 0$) atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\in\mathbb{Q}$.
Generalizare.

(1-5).6. Să se arate că $\sqrt[3]{2}\notin\{p+q\sqrt{r} : p, q, r\in\mathbb{Q}, r\geq 0\}$.

(1-5).7. Să se determine mulțimea

$$\{a\in\mathbb{Q} : \text{există } b\in\mathbb{Q} \text{ astfel încât } 5a^2-3a+16=b^2\}.$$

(1-5).8. Dacă $a, b, c\in\mathbb{Q}$ iar $p\in\mathbb{N}$ este un număr prim astfel încât $a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}=0$, atunci $a=b=c=0$.

(1-5).9. Să se demonstreze că dacă $a_1, \ldots, a_m$ sunt numere naturale două câte două diferite, nici unul dintre ele nefiind pătratul unui număr întreg mai mare decât 1, şi $b_1,\ldots,b_m$ numere întregi nenule, atunci $b_1\sqrt{a_1}+b_2\sqrt{a_2}+\ldots+b_m\sqrt{a_m}\neq 0$.

(1-5).10. Dacă $m, n\in\mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, atunci $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

(R. Gologan)

(1-5).11. Să se arate că există $a, b\in\mathbf{I}$ astfel încât $a^b\in\mathbb{N}$.

(1-5).12. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n\geq 1$ avem egalitatea

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

(Botez, Catalan)

(1-5).13. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive astfel încât $abc=1$, atunci $\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=1$.

(1-5).14. Dacă a, b∈ℕ* astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ∈ℕ, atunci a=b.

(1-5).15. Să se arate că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ ∈**I**.

(1-5).16. Fie z , z′ ∈ℂ astfel încât 1+zz′≠0 şi | z |=| z′ |=1.
Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'}$ ∈ℝ.

(1-5).17. Fie $z_1, \ldots, z_n$ ∈ℂ astfel încât $|z_1|=\ldots=|z_n|=r\neq 0$.
Să se demonstreze că $\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots z_n}$ ∈ℝ.

(1-5).18. Fie M⊆ℂ astfel încât {z ∈ℂ : | z | =1}⊆M şi pentru orice z_1, z_2 ∈M ⇒z_1+z_2∈M. Să se demonstreze că M=ℂ.

(1-5).19. Fie α∈ℂ o rădăcină cubică a unitații diferită de 1.
Dacă a, b, c ∈ ℝ, atunci
(i) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+\alpha b+\alpha^2 c)(a+\alpha^2 b+\alpha c)$;
(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\alpha b+\alpha^2 c)(a+\alpha^2 b+\alpha c)$.

(1-5).20. Pentru oricare trei numere x, y, z ∈ ℂ avem egalitatea

$$|x|^2+|y|^2+|z|^2+|x+y+z|^2=|x+y|^2+|y+z|^2+|x+z|^2.$$

(1-5).21. Fie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ ∈ ℂ iar $s_k = a_1 + \ldots + a_k$, $1 \le k \le n$.
Atunci $a_1b_1+\ldots+a_nb_n=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+\ldots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n$.

(Abel)

(1-5).22. Dacă a_i, b_i, x_i, y_i ∈ ℂ, $1 \le i \le n$, $n \ge 2$, atunci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)(x_iy_j-x_jy_i).$$

(Lagrange)

Capitolul 6 : Câteva principii de rezolvare a problemelor de matematică

6.1. Să se arate că orice număr natural n admite multiplii la a căror scriere în sistemul zecimal apar numai cifrele 0 şi 1.

6.2. Să se afle mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea: mulţimea{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5} poate fi împărţită în două submulţimi disjuncte astfel încât produsul tuturor elementelor uneia din ele să fie egal cu produsul elementelor celeilalte submulţimi.

6.3. Fie ABCD un pătrat de latură 1 în interiorul căruia se trasează cercuri astfel încât suma perimetrelor lor să fie egală cu 10. Să se arate că există o infinitate de drepte cu proprietatea că fiecare intersectează cel puţin patru cercuri.

6.4. Fie P un pătrat de latură a şi A, B două mulţimi în plan astfel încât $P\subseteq A\cup B$. Atunci A sau B au diametrul mai mare sau egal cu $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ şi $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ este cel mai mic număr cu această proprietate.

6.5. Pe o sferă de rază 1 se iau la întâmplare 9 puncte. Demonstraţi că există două puncte a căror distanţă în linie dreaptă nu depăşeşte $\sqrt{2}$.

6.6. O placă în formă de pătrat cu latura 1 este colorată cu trei culori. Să se arate că există două puncte la fel colorate a căror distanţă este cel puţin $\frac{\sqrt{65}}{8}$.

6.7. Fie un pătrat cu latura de 38 cm şi în interiorul său 100 de poligoane convexe de arie cel mult π cm^2 şi perimetru cel mult de 2π cm. Să se arate că se poate trasa în interiorul pătratului un cerc de rază 1 cm care să nu taie nici unul dintre aceste poligoane.

6.8. Fie în plan un cerc de rază n (cu $n\in\mathbb{N}$). Pe el se consideră m coarde cu proprietatea că orice punct din interiorul cercului este la distanţă mai mică sau egală cu 1 de una din coarde. Să se arate că $m \geq n$.

6.9. Dacă un determinant de ordinul n are $n^2 - n + 2$ elemente egale, atunci determinantul este nul.

6.10. Se dau n numere naturale, nenule, distincte, toate mai mici decât 2n. Să se demonstreze că printre ele există unul egal cu n sau două a căror sumă este 2n.

(D. Miheţ)

6.11. Se consideră un sistem de p ecuaţii cu $q = 2p$ necunoscute:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$
în care fiecare coeficient $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$.

Să se arate că există o soluţie $(x_1,\ldots,x_q)$ a sistemului astfel încât:

(i) toţi x_j ($j = 1, 2, \ldots, q$) sunt întregi;

(ii) Pentru cel puţin un j se găseşte $x_j \neq 0$;

(iii) $|x_j| < p$, pentru toţi $j = 1, 2, \ldots, q$.

6.12. Fie $a\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $a+\frac{1}{a}\in\mathbb{Z}$. Atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$.

(L. Tuţescu)

6.13. Să se arate că dacă $x_1 \geq a_1 \geq 1$, $x_2 \geq a_2 \geq 1,\ldots,$ $x_n \geq a_n \geq 1$, atunci
$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{2} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)\ldots(a_n+x_n)}{a_1a_2\ldots a_n + x_1x_2\ldots x_n},\ n\in\mathbb{N}.$$

(V. Postolică)

6.14. Se consideră 2n numere reale $x_1 \geq x_2 \geq\ldots\geq x_n$ şi $y_1 \geq y_2 \geq\ldots\geq y_n$, $n\in\mathbb{N}$. Fie $z_1, z_2, .., z_n$ o permutare a numerelor $y_1, y_2, .., y_n$.

Să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

(OIM-1975)

6.15. Fie a_1, a_2, .., a_n numere reale astfel încât $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx \geq 0$, pentru orice x∈ℝ. Atunci, $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx = 0$, pentru orice x∈ℝ.

(D. Buşneag)

6.16. Să se arate că orice polinom de grad n de o variabilă cu coeficienți strict pozitivi poate fi scris ca sumă de $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ polinoame cu coeficienți strict pozitivi şi rădăcini strict negative.

(D. Ştefănescu)

6.17. Fie a > 0, $a_1 = a$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$, pentru orice n ≥ 1.

Să se demonstreze că $\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{a}}{a_1 + \sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$, pentru orice n ≥ 1.

6.18. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n ≥ 4 există un poligon convex cu n laturi, nu toate egale, astfel încât suma distanțelor de la orice punct interior la laturi să fie aceeaşi.

(D. Schwartz)

6.19. Se consideră pe o dreaptă n intervale cu proprietatea că oricare două au intersecția nevidă. Să se arate că toate intervalele au un punct comun.

6.20. Fie în plan două mulțimi de puncte finite şi disjuncte. Să se arate că există o linie frântă închisă care nu se autointersectează, cu segmentele consecutive perpendiculare, care separă punctele celor două mulțimi.

(S. Popa)

6.21. Să se demonstreze că pentru orice număr natural m, există o mulțime E finită nevidă de puncte în plan cu proprietatea: Dacă A∈E, există în E, m şi numai m puncte situate la distanța 1 de A.

(OIM)

6.22. Fie p un număr prim, p>2, iar x_1, x_2, .., x_{p-1} numere întregi, niciunul dintre ele nefiind divizibil prin p.

Să se arate că cel puțin unul dintre numerele $e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_{p-1}x_{p-1}$ $(e_i = \pm 1)$ se divide cu p.

6.23. Să se demonstreze că dacă α este un număr real astfel încât $\cos \pi\alpha = \frac{1}{3}$, atunci α este irațional (unghiul α este considerat în radiani).

(Concurs USA)

6.24. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 1000 nu se divid nici cu 2 nici cu 3 nici cu 5?

6.25. Să se afle în câte moduri se pot împărți 5 obiecte distincte la 3 persoane, cu condiția ca fiecare persoană să primească cel puțin un obiect.

6.26. Fiind date n puncte în plan care se unesc între ele prin segmente, să se demonstreze că dacă nu există nici un triunghi cu vârfurile în cele n puncte, atunci există cel puțin un punct care este extremitatea a cel mult $\left[\frac{n}{2}\right]$ segmente.

6.27. Să se demonstreze că n puncte situate în plan pot fi unite prin cel mult $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ segmente de dreaptă, astfel încât să nu se formeze nici un triunghi cu vârfurile în aceste puncte.

6.28. Fie n un număr natural. Folosind principiul includerii şi excluderii să se găsească o formulă pentru determinarea lui $\varphi(n)$, φ fiind indicatorul lui Euler.

6.29. Fie n un număr natural iar σ o permutare a mulțimii $\{1, 2, .., n\}$. Spunem că permutarea σ admite o coincidență în i dacă $\sigma(i) = i$.

Să se găsească numărul P(n) al permutărilor de n obiecte fără coincidențe.

Capitolul 7 : Clase de funcții

7.1. Utilizând eventual proprietățile funcției caracteristice, să se demonstreze că dacă M este o mulțime oarecare iar A, B, $C \in P(M)$, atunci:

(i) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

(ii) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(iii) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

7.2. Fie A, B, X submulțimi ale unei mulțimi T.

Dacă $A\cap X= B\cap X$ şi $A\cup X = B\cup X$, atunci A = B.

7.3. Fie T o mulțime iar A, B două părți disjuncte ale lui T. Cu ajutorul proprietăților funcției caracteristice să se găsească mulțimea X ce verifică egalitatea:

$$A\cup(B \setminus X) = B\cup X.$$

7.4. Fie T o mulțime oarecare iar A, B, C părți ale lui T, astfel încât B, $C \subset A$ şi $B\cap C = \varnothing$.

Utilizând proprietățile funcției caracteristice să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \\ X \setminus Y = C \end{cases}.$$

7.5. Fie M o mulțime oarecare iar a, b două numere reale distincte.

Pentru $A\in P(M)$ definim $\psi_A : M \to \{a, b\}$,

$$\psi_A(x)=\begin{cases} a, & dacă\ x \in A \\ b, & dacă\ x \notin A \end{cases}, \text{ pentru orice } x\in M.$$

Să se demonstreze că dacă oricare ar fi A, $B\in P(M)$, avem $\psi_{A\cap B}=\psi_A \psi_B$, atunci a=1 şi b=0.

7.6. Fie M, N, P mulțimi iar $f : M \to N$, $g : N \to P$, $h : P \to M$ trei funcții. Se consideră funcțiile compuse $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$.

Să se demonstreze că :

(i) Dacă două dintre aceste funcții compuse sunt injective iar cea de a treia este surjectivă, atunci f, g, h sunt bijective;

(ii) Dacă două dintre aceste funcții compuse sunt surjective iar cea de a treia este injectivă, atunci f, g, h sunt bijective.

(S. Ianuş)

7.7. Se dau funcțiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g, h strict crescătoare şi bijective. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{g(x)} + h(x)$, $a > 1$, este bijectivă.

(D. Acu, M. Țena)

7.8. Dacă o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este injectivă şi există o funcție $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x+y) = g(f(x), y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, atunci funcția f este periodică.

(D. M. Bătinețu)

7.9. Fie p un număr prim iar $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$ o mulțime arbitrară de numere naturale astfel încât orice număr din A nu se divide cu p. Fie P(A) mulțimea părților lui A, iar $f : P(A) \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ definită astfel:

(i) Dacă $B = \{ a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \} \subset A$ şi $\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \equiv n (\bmod p)$, atunci $f(B) = n$;

(ii) $f(\varnothing) = 0$.

Să se demonstreze că pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, există $B \subset A$ astfel încât $f(B)= n$.

(OIM-1978)

7.10. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(n+1) > f(f(n))$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Să se demonstreze că $f = 1_{\mathbb{N}}$.

(OIM-1977)

7.11. Fie M o mulțime finită iar $f : M \to M$ o funcție astfel încât $f \circ f = 1_M$.

Să se demonstreze că dacă M are număr impar de elemente, atunci există $x \in M$ astfel încât $f(x) = x$.

(G. Ionescu)

7.12. Fie a, b, A, B numere reale date.

Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$.

Să se demonstreze că dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, atunci $a^2 + b^2 \leq 2$ şi $A^2 + B^2 \leq 1$.

(OIM-1976)

7.13. Să se determine toate funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, pentru care

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y) + 1], \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Q}.$$

(OM-P. Dalyay)

7.14. Să se găsească funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f^2(x) + f^2(y) \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

(OM-L. Panaitopol)

7.15. Fie funcția f : $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ astfel încât $f(x)f(ix) = x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{C}$. Să se demonstreze că funcția f este impară.

(OM-T. Andreescu)

7.16. Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ o funcție cu proprietatea că există a > 0 astfel încât $f(x+a)=\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este periodică.

(T. Andreescu)

7.17. Se dă funcția f : $\mathbb{R}\to[0, 1]$ având proprietatea $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ ($a\in\mathbb{R}_+$ fixat). Să se demonstreze că funcția f este periodică; în cazul în care a = 1, să se dea un exemplu de o astfel de funcție neconstantă.

(OIM-1968)

7.18. Să se determine toate funcțiile f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac condiția $xf(x) + yf(y) = (x+y)f(x)f(y)$, pentru orice x, y $\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze că printre aceste funcții se găsesc numai două funcții continue.

7.19. Să se determine funcția f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care nu este identic nulă şi satisface condiția $f(x)f(y) = f(x-y)$, pentru orice x, $y\in\mathbb{R}$.

7.20. Fie f : $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=2z+|z|$, z $\in\mathbb{C}$. Să se arate că f este bijectivă iar apoi să se descrie $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

(M. Panaitopol)

7.21. Fie M o mulțime iar A, $B\in P(M)$; se consideră funcția f : $P(M)\to P(A)\times P(B)$ definită prin $f(X) = (X\cap A, X\cap B)$, $X\in P(M)$.

Să se demonstreze că:

(i) f este injectivă $\Leftrightarrow$ $A\cup B = M$;

(ii) f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $A\cap B = \emptyset$;

(iii) f este bijectivă $\Leftrightarrow$ $A = C_M B$; în acest caz să se descrie inversa lui f.

7.22. Fie A o mulțime. Să se demonstreze că :

(i) A este finită $\Leftrightarrow$ orice injecție f : $A\to A$ este şi surjecție;

(ii) A este finită $\Leftrightarrow$ orice surjecție f :$A\to A$ este şi injecție.

(OM-V. Matrosenco)

7.23. Fie funcțiile f, g, h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ având proprietățile că g şi h sunt bijective iar f=g-h. Să se demonstreze că f(n) = 0, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

7.24. Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ iar f_1, f_2 : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right], f_2(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right].$$

Atunci f_1 este pară iar f_2 este impară şi $f = f_1 + f_2$, adică *orice funcţie f se poate scrie ca suma dintre o funcţie pară şi una impară.*

7.25. Fie f : ℝ→ℝ o funcţie periodică şi monotonă. Atunci f este constantă.

7.26. Fie f : ℝ→ℝ o funcţie continuă. Atunci f este pară pe ℝ dacă şi numai dacă pentru orice a ∈ℝ avem $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

7.27. Fie f : ℝ→ℝ o funcţie continuă. Atunci f este impară pe ℝ dacă şi numai dacă pentru orice a∈ℝ funcţia F : ℝ→ℝ, F(a) = $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ este constantă pe ℝ.

7.28. Fie f : ℝ→ℝ o funcţie continuă. Punctul C(a, b) este centru de simetrie pentru graficul lui f, dacă şi numai dacă $\int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx$, pentru orice x ∈ ℝ.

(D. Buşneag)

7.29. O funcţie continuă f : ℝ→ℝ are perioada T>0 dacă şi numai dacă F : ℝ→ℝ, F(x) = $\int_{x}^{x+T} f(t)dt$ este constantă.

7.30. Să se arate că funcţia f : ℝ→ℝ, $f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ nu este periodică.

7.31. Fie funcţia f : ℝ→ℝ, $f(x) = \sin x + \cos \alpha x$.

Să se arate că dacă f este periodică, atunci α∈ℚ.

Capitolul 8 : Inegalităţi

8.1. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci:

(i) $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$;

(ii) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Nesbitt);

(iii) $\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} \leq 1$ (M. Dincă) .

8.2. Să se arate că pentru orice x ∈ ℝ avem inegalităţile:

(i) $\left|\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right| \leq \frac{1}{4}$;

(ii) $\left|\frac{x(1-x^2)(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}\right| \leq \frac{1}{8}$.

8.3. Fie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_i + b_i = 1$, pentru orice $1 \le i \le n$. Atunci $(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \ge (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2 - n)$.

8.4. Fie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ($n \ge 3$) iar σ o permutare asupra mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci $a_1a_{\sigma(1)} + \ldots + a_na_{\sigma(n)} \le a_1^2 + \ldots + a_n^2$.

8.5. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $1 \le x^2 - xy + y^2 \le 2$, atunci $\frac{2}{9} \le x^4 + y^4 \le 8$.

(OM-L. Panaitopol, I. Tomescu)

8.6. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt pozitive dacă şi numai dacă numerele $\sum x_1$, $\sum x_1x_2$, ..., $x_1x_2\ldots x_n$ sunt pozitive.

8.7. Dacă $a, b, c \ge 0$, atunci $\sqrt[4]{a + \sqrt[3]{b + \sqrt{c}}} \ge \sqrt[40]{abc}$.

(R. Bairac, M.Teleuca)

8.8. Să se demonstreze că dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $|z| = 1$, atunci $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \ge 2$.

8.9. Dacă $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ ($n \ge 1$), atunci $\frac{|z_1 + \ldots + z_n|}{1 + |z_1 + \ldots + z_n|} \le \frac{|z_1|}{1+|z_1|} + \ldots + \frac{|z_n|}{1+|z_n|}$.

8.10. Să se demonstreze că pentru oricare trei numere $x, y, z \in \mathbb{C}$ avem

$$|x+y+z| + |x| + |y| + |z| \ge |x+y| + |y+z| + |x+z|.$$

(Hlawka)

8.11. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive ($n \ge 2$) iar σ o permutare asupra mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_{\sigma(1)}}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_{\sigma(2)}}\right)\ldots\left(a_n + \frac{1}{a_{\sigma(n)}}\right) \le \left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right).$$

(OM-1979, D. Buşneag)

8.12. Fie $x_1, \ldots, x_n$ numere reale pozitive ($n \ge 2$). Atunci

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \ge \frac{1}{n} \max_{1 \le i,j \le n} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2.$$

(Concursul Gh Țițeica, 1987, 1992, D. Buşneag)

8.13. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive şi diferite de 1.

Atunci funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a_1^x + \ldots + a_n^x)(a_1^{-x} + \ldots + a_n^{-x})$ este strict crescătoare.

(OM-1979, D. Buşneag)

8.14. Fie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ cu $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$, $s_k = a_1 + \ldots + a_k$, $1 \le k \le n$, $m = \min_{1 \le k \le n}\{s_k\}$, $M = \max_{1 \le k \le n}\{s_k\}$.

Atunci $mb_1 \le a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \le Mb_1$.

(Abel)

8.15. Dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$, $n \geq 2$, atunci

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1\ldots b_n}.$$

(Huygens-Cauchy)

8.16. Dacă $a_1, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 2$ şi $x \in [0, 1]$, atunci

$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leq \frac{a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x + \ldots + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x}{n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

(M. Dicu)

8.17. Să se arate că $\sqrt[n]{k(k+1)\ldots(k+n)} - \sqrt[n]{n!} \geq k$, unde $n, k \in \mathbb{N}$.

(D. Buşneag)

8.18. Fiind date n numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom nota prin g_n media lor geometrică.

Să se demonstreze că $a_n \geq ng_n - (n-1)g_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

8.19. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, m, M$ numere reale strict pozitive astfel încât $m \leq a_i \leq M$, $i = 1, 2, \ldots, n$ cu $n \in \mathbb{N}$. Atunci

(i) $n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \leq \frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2$; (Schweitzer)

(ii) Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ atunci

$\left[n\cdot\sqrt[n]{p_1\ldots p_n}\right]^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_i}\right) \leq \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\cdot(p_1+\ldots+p_n)^2$; (Kantorivici)

(iii) Dacă $n \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 2]$, atunci

$$\frac{n^3}{2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2 \leq n^3;$$ (L. Panaitopol)

(iv) Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ şi $|z_1| = \ldots = |z_n| = 1$, atunci

$$0 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}\right) \leq n.$$ (Gh. Andrei)

8.20. Fiind date numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât $x_1x_2\ldots x_n \geq 1$, să se demonstreze că $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leq x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4$ ($n \in \mathbb{N}$).

(D. Buşneag)

8.21. Numerele reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ şi $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$ satisfac următoarele condiții: $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, …, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Să se demonstreze că pentru orice număr natural k,

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k \geq b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k.$$

8.22. Să se arate că

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b),$$

unde a, b, c sunt numere reale pozitive.

8.23. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale supraunitare.

Să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$, n ∈ ℕ.

8.24. Fie $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numere reale iar σ o permutare a mulțimii {1, 2, …, n}. Dacă $a_1 + a_{\sigma(1)} < a_2 + a_{\sigma(2)} < \ldots < a_n + a_{\sigma(n)}$, atunci σ este permutarea identică a mulțimii {1, 2, …, n}.

(M. Dadârlat)

8.25. Fie f : ℕ*→ ℕ* o funcție injectivă.

Demonstrați că pentru orice n ∈ ℕ avem inegalitatea $\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(OIM)

8.26. Să se demonstreze că pentru orice x ∈ ℝ şi n ∈ ℕ este adevărată inegalitatea

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0.$$

8.27. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale a, b, x are loc inegalitatea

$$1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge (\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x).$$

(R. M. Popovici)

8.28. În triunghiul ABC, m($\hat{C}$)= 60°. Să se demonstreze că $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\ge 2$.

(OIM)

8.29. Să se găsească cel mai mic număr real a pentru care

$a\cdot\cos^2 x+\sin^2 y \ge \cos 2(x+y)$, pentru orice x, y ∈ ℝ.

8.30. Fie T_1 şi T_2 două triunghiuri având lungimile laturilor egale cu a, b, c şi respectiv u, v, w. Dacă notăm cu S_1 şi S_2 ariile celor două triunghiuri, să se demonstreze inegalitatea $16S_1S_2 \le a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2)$.

În ce caz avem egalitate?

(OIM)

8.31. Fie ABC un triunghi de semiperimetru p. Dacă i_a, i_b, i_c sunt respectiv lungimile bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C iar p semiperimetrul lui ABC, să se demonstreze că

$$\frac{1}{i_a^2}+\frac{1}{i_b^2}+\frac{1}{i_c^2}\ge\frac{9}{p^2}.$$

(D. Buşneag)

8.32. Fie (H) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon regulat iar (T) un triunghi oarecare situat în interiorul lui (H) astfel încât una din laturile triunghiului să fie paralelă cu o latură a hexagonului. Dacă notăm cu S(H), S(T) aria hexagonului, respectiv a triunghiului, să se demonstreze că $S(T)\le\frac{3}{8}S(H)$.

8.33. Se consideră în plan un cerc de rază 1 şi punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Să se arate că există pe circumferința cercului un punct M astfel încât $|MA_1|+|MA_2|+\ldots+|MA_n|\ge n$.

(OM - M. Colțoiu)

8.34. Să se arate că pentru orice n ≥ 2, $a_1, \ldots, a_n$, $x \in \mathbb{R}$ avem inegalitatea:

$$\sin(a_1x)\cdot\sin(a_2x)\cdot\ldots\cdot\sin(a_nx)+\cos(a_1x)\cdot\cos(a_2x)\cdot\ldots\cdot\cos(a_nx)\le 1 .$$

(L. Panaitopol)

8.35. Să se arate că în orice triunghi ABC avem inegalitatea:

$$\frac{R}{r}\ge\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}.$$

Să se deducă apoi inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$.

8.36. Fie ABC un triunghi oarecare. M un punct în interiorul său iar d_a, d_b, d_c distanțele de la M la BC, CA respectiv AB.

Să se arate că:

(i) $MA+MB+MC\ge 2(d_a+d_b+d_c)$; (Erdös-Mordel)

(ii) $MA\cdot MB\cdot MC\ge (d_a+d_b)(d_b+d_c)(d_a+d_c)$.

8.37. Fie O un punct în planul triunghiului ABC. Să se arate că

(i) $3(OA^2+OB^2+OC^2)\ge AB^2+BC^2+AC^2$;

(ii) Generalizare.

8.38. Să se arate că :

(i) Dacă $0\le x<\frac{\pi}{2}$, atunci $\sin x\le x\le tgx$;

(ii) Dacă $0\le x<\frac{\pi}{2}$, atunci $2\sin x+tgx\ge 3x$; (Huygens)

(iii) Dacă $0<a<b<\frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{a}{b}<\frac{\sin a}{\sin b}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{b}$;

(iv) Dacă $x\ge 0$, atunci $\sin x\le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$;

(v) Dacă $x\ge 0$, atunci $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$;

(vi) Dacă $0\le x<\frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{x}{1+x}\le\sin x\le x$;

(vii) Dacă $0\le x<\frac{\pi}{2}$, atunci $tgx-x\ge\frac{x^3}{3}$.

8.39. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\ge 0$, $e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

8.40. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ şi diferite de 1 astfel încât $a_1^x+\ldots+a_n^x\ge n$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $a_1a_2\ldots a_n=1$.

8.41. Notațiile fiind cele obişnuite într-un triunghi ABC să se arate următoarele inegalități:

(i) $0<(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\le abc$;

(ii) R ≥ 2r ;

(iii) $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$;

(iv) $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$;

(v) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

(vi) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(vii) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$;

(viii) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$.

8.42. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n ≥ 5, avem

$$\log_2 3 + \log_3 4 + ... + \log_n (n+1) > n .$$

8.43. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n ≥ 2, avem

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} .$$

8.44. Să se demonstreze că, pentru orice numere naturale n, p ≥ 1, avem

$$\frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + ... + \frac{1}{2pn} \geq \frac{2pn}{3pn+1} .$$

8.45. Să se demonstreze că dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât n ≥ 2k, atunci $\sqrt{C_n^{k-1} \cdot C_n^k} + \sqrt{C_n^k \cdot C_n^{k+1}} < C_{n+1}^{k+1}$.

8.46. Fie a, b ∈ ℝ, a < b iar f : [a, b] →ℝ o funcție monoton crescătoare (descrescătoare).

Atunci $\int_a^b xf(x)dx \geq (\leq) \frac{a+b}{2} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

8.47. (i) Fie numerele reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ şi $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$;

(ii) Să se deducă din (i) că dacă avem funcțiile f, g : [a, b] →ℝ, astfel încât f este pozitivă şi descrescătoare iar g este strict pozitivă şi crescătoare pe [a, b], atunci

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \geq (b-a) \cdot \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} .$$

(C. Caragea)

8.48. Fie a, b ∈ ℝ, a < b iar f, g : [a, b] →ℝ continue şi strict pozitive pe [a, b] pentru care există α, β > 0 astfel încât $f(t) \leq \alpha + \beta \cdot \int_a^t g(s)f(s)ds$, pentru orice t ∈ [a, b].

Atunci pentru orice t ∈ [a, b], $f(t) \le \alpha \cdot e^{\beta \cdot \int_a^t g(s)ds}$.

(Gronwall)

8.49. Fie a, b ∈ ℝ, a < b iar f : [a, b] →ℝ o funcţie continuă şi convexă.

Atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

(Hermite-Jensen-Hadamard)

8.50. Fie α, β > 0 şi f : [0, α] → [0, β] o bijecţie derivabilă şi crescătoare.

Atunci pentru orice a ∈ (0, α) şi b ∈ (0, β) avem

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \ge ab,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă b = f(a).

(Young)

8.51. (i) Fie 0 < a < A, 0 < b < B, $a_1, \ldots, a_n \in [a, A]$, $b_1, \ldots, b_n \in [b, B]$ şi n ≥ 2.

Să se demonstreze că $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2} \le \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$;

(ii) Să se deducă din (i) că dacă 0 < r < R, 0 < s < S, f, g : [a, b] →ℝ sunt funcţii continue astfel încât 0 < s ≤ g(x) ≤ S, pentru orice x ∈ [a, b], atunci

$$\frac{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2} \le \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{RS}{rs}} + \sqrt{\frac{rs}{RS}}\right)^2.$$

(Polya- Szegö)

Capitolul 9 : Grupuri finite

9.1. Să se demonstreze că $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$ şi $T = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ (n∈ℕ).

9.2. Fie K = {1, a, b, c} o mulţime cu patru elemente.

Pe K considerăm operaţia de înmulţire a cărei tabelă este:

·	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Să se demonstreze că dubletul (K,·) este grup comutativ.

Observaţie. Grupul K poartă numele de *grupul lui Klein.*

9.3. Să se demonstreze că orice grup cu cel mult cinci elemente este comutativ.

9.4. Să se demonstreze că pe orice mulţime finită se poate defini o structură de grup comutativ.

9.5. Fie $p \geq 3$ un număr natural impar. Construiţi un grup $(G,\cdot)$ cu p^3 elemente cu proprietatea că pentru orice $x \in G$, $x^p = 1$.

9.6. Fie G o mulţime finită pe care este definită o operaţie algebrică asociativă, notată multiplicativ. Dacă operaţia are proprietatea de simplificare la stânga şi la dreapta atunci $(G,\cdot)$ este un grup.

9.7. Fie $(G, +)$ un grup abelian finit cu r elemente şi să considerăm două elemente fixate a şi b din acest grup. Pentru m şi n numere naturale date, notăm cu $M_{m,n}(G)$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane având elementele din grupul G, iar cu $M(a, b)$ notăm submulţimea lui $M_{m,n}(G)$ formată din acele matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este a, iar suma elementelor de pe fiecare coloană este b.

Să se demonstreze că :

(i) $(M_{m,n}(G), +)$ este grup abelian având r^{mn} elemente;

(ii) Dacă $ma \neq nb$, atunci $M(a, b)$ este mulţimea vidă ;

(iii) Dacă $ma = nb$, atunci $M(a, b)$ are $r^{(m-1)(n-1)}$ elemente.

9.8. Fie G un grup finit iar $A, B \subseteq G$ astfel încât $|A| + |B| > |G|$.

Să se demonstreze că $G = AB$.

9.9. Fie G un grup astfel încât $x^2 = 1$, pentru orice $x \in G$.

Să se demonstreze că G este comutativ iar dacă G este finit, atunci $|G|$ este o putere naturală nenulă a lui 2.

9.10. Fie G un grup finit şi p un număr prim care divide ordinul lui G.

Atunci numărul soluţiilor ecuaţiei $x^p = 1$ este un multiplu nenul al lui p.

9.11. Fie $(G, \cdot)$ un grup care are un subgrup H astfel încât $G \setminus H$ are un număr finit de elemente. Să se arate că grupul G este finit.

9.12. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea (A) dacă $G \neq H$ şi produsul elementelor lui H este egal cu produsul elementelor din $G \setminus H$. Să se arate că dacă G are un subgrup cu proprietatea (A), atunci orice subgrup al lui G, diferit de G are proprietatea (A).

9.13. Pentru un grup finit G notăm cu $s(G)$ numărul subgrupurilor sale.

Să se arate că:

(i) Pentru orice număr real $a > 0$ există grupuri finite G astfel încât $\frac{|G|}{s(G)} < a$;

(ii) Pentru orice număr real $a > 0$ există grupuri finite G astfel încât $\frac{|G|}{s(G)} > a$.

(OM-B. Berceanu)

9.14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ iar $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}$.

Să se demonstreze că $U_n \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $|U_n| = n$ iar U_n este grup ciclic.

9.15. Să se arate că în laticea $L(\mathbb{Z})$, a subgrupurilor grupului $(\mathbb{Z}, +)$, pentru $H = m\mathbb{Z}$ şi $K = n\mathbb{Z}$, cu $m, n \in \mathbb{N}$, $H \wedge K = [m, n]\mathbb{Z}$ iar $H \vee K = (m, n)\mathbb{Z}$.

Să se deducă de aici faptul că $(L(\mathbb{Z}), \subseteq)$ este latice distributivă (adică pentru orice $H, K, T \in L(\mathbb{Z})$, $H \wedge (K \vee T) = (H \wedge K) \vee (H \wedge T)$).

9.16. Fie (X, d) un spaţiu metric, $Y \subseteq X$ iar $S_X(Y) = \{f \in Izom(X) : f(Y) = Y\}$.
Să se demonstreze că $S_X(Y) \leq Izom(X)$.
Observaţie. $S_X(Y)$ poartă numele de *grupul de simetrie al lui Y în raport cu X.*

9.17. Pentru un număr natural n şi P_n un poligon regulat cu n laturi din planul euclidian E^2, definim $D_n = S_{E^2}(\overline{P}_n)$ ($\overline{P}_n$ fiind conturul lui P_n). Fie O centru lui P_n, ρ rotaţia în jurul lui O de unghi $2\pi/n$ iar ε simetria faţă de una din axele de simetrie ale lui P_n.
Să se demonstreze că $D_n = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \ldots, \rho^{n-1}\varepsilon\}$.

9.18. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpoziţiile $\tau_i = (i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

9.19. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpoziţiile $\tau_i = (1, i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

9.20. Să se demonstreze că pentru orice $1 \leq k \leq n$, grupul simetric S_n este generat de transpoziţiile $(1, k), (2, k), \ldots, (k-1, k), (k+1, k), \ldots, (n, k)$.

9.21. Să se demonstreze că grupul simetric S_n este generat de transpoziţia $\tau = (1, 2)$ şi ciclul $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$.

9.22. Să se demonstreze că grupul altern A_n este generat de ciclii de lungime 3.

9.23. Să se demonstreze că grupul altern A_n este generat de ciclii $(1, 2, 3), (1, 2, 4), \ldots, (1, 2, n)$.

9.24. Să se demonstreze că dacă α este un r-ciclu în S_n, atunci $\alpha^r = e$ $(r \leq n)$ şi r este cel mai mic număr natural cu această proprietate (deci ordinul unui r-ciclu este r).

9.25. Să se demonstreze că S_n poate fi privit ca subgrup al lui A_{n+2}.

9.26. Să se demonstreze că pentru $n \geq 4$, $Z(A_n) = \{e\}$.

9.27. Să se demonstreze că pentru $n \geq 3$, $Z(S_n) = \{e\}$.

9.28. Să se rezolve în S_n ecuaţia $x^2 = (1, 2, \ldots, n)$.

9.29. Fie p un număr prim iar $\sigma \in S_n$ un ciclu de lungime m $(m \leq n)$.
Să se demonstreze că :
(i) Dacă $p \nmid m$, atunci σ^p este un ciclu de lungime m, având aceeaşi orbită ca şi σ ;
(ii) Dacă $p \mid m$, atunci σ^p este un produs de p cicli disjuncţi de lungime m/p.

9.30. Fie p un număr prim. Să se demonstreze că :
(i) Dacă $\sigma \in S_n$ este un ciclu de lungime m, unde $p \nmid m$, atunci există $\tau \in S_n$ un ciclu de lungime m astfel încât $\tau^p = \sigma$;
(ii) Dacă $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \in S_n$ sunt ciclii disjuncţi de aceeaşi lungime k, atunci există $\tau \in S_n$ un ciclu de lungime m=kp astfel încât $\tau^p = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_p$.

9.31. Fie un număr prim, $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$. Să presupunem că în descompunerea în ciclii disjuncți a lui σ apar α_1 ciclii de lungime m_1, α_2 ciclii de lungime m_2, … , α_t ciclii de lungime m_t ($m_1, m_2, \dots, m_t$ fiind distincte două câte două) iar $m_1, m_2, \dots, m_k$ ($k \leq t$) sunt divizibile cu p.

Să se demonstreze că ecuația $x^p = \sigma$ are soluție în S_n dacă şi numai dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sunt divizibile prin p.

Aplicație. Să se studieze compatibilitatea ecuațiilor:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 19 & 13 & 16 & 4 & 15 & 17 & 9 & 18 & 14 & 10 \end{pmatrix} \text{ în } S_{19};$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 7 & 8 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \text{ în } S_{10}.$$

9.32. Dacă p este un număr prim, $p \geq n$, să se demonstreze că ecuația $x^p = \sigma$ are soluție pentru orice $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$.

9.33. Fie p un număr prim. Să se demonstreze că $x \in S_n$ este soluție a ecuației $x^p = e$ dacă şi numai dacă x este un produs de ciclii disjuncți de lungime p din S_n.

9.34. Fie G un grup comutativ cu n generatori.

Să se demonstreze că orice subgrup al lui G poate fi generat de cel mult n elemente.

9.35. Fie G un grup finit astfel încât $|Z(G)| > \frac{1}{2} \cdot |G|$.

Să se demonstreze că grupul G este comutativ.

9.36. Fie G un grup finit comutativ astfel încât $x^2 = 1$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G. Să se demonstreze că $x^2 = 1$, oricare ar fi $x \in G$.

9.37. Să se demonstreze că într-un grup G cu 2n elemente, unde n este număr impar, există cel mult n elemente de ordin 2.

9.38. Fie G un grup iar $x \in G$ un element de ordin finit.

Să se demonstreze că $o(x^n) \mid o(x)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

9.39. Să se arate că într-un grup abelian G există un element al cărui ordin este egal cu c.m.m.d.c al ordinelor tuturor elementelor $x \neq 1$ ale lui G.

9.40. Fie G un grup iar $x \in G$ un element de ordin finit n.

Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $o(x^m) = n/(m, n)$.

9.41. Fie G un grup şi $x, y \in G$ cu $o(x) = n_1$, $o(y) = n_2$ finite, $(n_1, n_2) = 1$ iar $xy = yx$.

Să se demonstreze că $o(xy) = o(x) \cdot o(y)$.

Dacă condiția $(n_1, n_2) = 1$ se înlocuieşte cu $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, să se arate că $o(xy) = [n_1, n_2]$.

9.42. Fie G un grup, $x \in G$ astfel încât $o(x) = n_1 n_2$ cu $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $(n_1, n_2) = 1$.

Să se demonstreze că există şi sunt unic determinate elementele $y, z \in G$ astfel încât $x = yz = zy$ şi $o(y) = n_1$, $o(z) = n_2$.

9.43. Fie G un grup iar x, y$\in$G astfel încât o(x) = m, o(y) = n, (m, n$\in\mathbb{N}$*) iar $[x, y]= x^{-1}y^{-1}xy$. Să se demonstreze că dacă x şi y comută cu [x, y], atunci $[x, y]^d=1$, unde d = (m, n).

Observaţie. [x, y] poartă numele de *comutatorul* lui x cu y.

9.44. Fie (G,·) un grup comutativ de ordin finit.

Sunt echivalente :

(i) G este de ordin impar ;

(ii) Pentru orice a$\in$G ecuaţia x^2 = a are soluţie unică în G.

9.45. Fie (G,·) un grup finit. Dacă m şi n sunt divizori ai ordinului grupului, atunci ecuaţiile $x^m = 1$ şi $x^n = 1$ au o singură soluţie comună dacă şi numai dacă (m, n) = 1.

9.46. Fie G un grup cu 10 elemente în care există a, b$\in$G \ {1} distincte astfel încât $a^2 = b^2 = 1$. Să se arate că G nu este abelian.

9.47. Fie G un grup comutativ de ordin n.

Arătaţi că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul tuturor elementelor de ordin cel mult 2.

Aplicând acest rezultat grupului multiplicativ $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ cu p prim, să se demonstreze că p | (p-1)!+1.

Observaţie. Consecinţa de la exerciţiul **9.47.** este datorată lui *Wilson.*

9.48. Fie p un număr prim iar n ≥ 2 un număr natural.

Să se demonstreze că:

(i) Dacă p = 2 şi n > 2, atunci în grupul U($\mathbb{Z}_{2^n}$,·) numai elementele $-\hat{1}, \hat{1}, \widehat{2^{n-1}-1}, \widehat{2^{n-1}+1}$ au ordinul cel mult 2 ;

(ii) Dacă p > 2, atunci în grupul U($\mathbb{Z}_{p^n}$,·) numai elementele $\hat{1}$ şi $-\hat{1}$ au ordinul cel mult 2 ;

(iii) Să se deducă de aici următoarele variante de generalizare pentru *teorema lui Wilson*:

a) Dacă p este un număr prim, p > 2 şi n ≥ 1 un număr natural, atunci :

$$p^n \mid \Big(\prod_{\substack{1\le a<p^n\\(a,p)=1}} a\Big)+1$$

b) Dacă p = 2 şi n >2, atunci : $2^n \mid \Big(\prod_{\substack{1\le a<2^n\\(a,2)=1}} a\Big) + 1.$

c) Dacă p = 2 şi n = 2, atunci : $2^2 \mid \Big(\prod_{\substack{1\le a<2^2\\(a,2)=1}} a\Big) + 1.$

9.49. Fie p un număr prim, n$\in\mathbb{N}$* şi $U_{p^n} = \{z\in\mathbb{C}^* : z^{p^n} =1\}$.

Să se demonstreze că:

(i) $U_{p^0}\subset U_{p^1}\subset\ldots\subset U_{p^n}\subset U_{p^{n+1}}\subset\ldots\subset\mathbb{C}^*$;

(ii) Dacă notăm $U_{p^\infty} = \bigcup_{n\ge 0} U_{p^n}$, atunci $U_{p^\infty} \le (\mathbb{C}^*,\cdot)$;

(iii) Dacă H ≤ (U_{p^∞},·) este propriu, atunci există n$\in\mathbb{N}$ astfel încât H = U_{p^n} .

9.50. Fie A un inel unitar, n$\in\mathbb{N}$, n ≥ 2.

Notăm $GL_n(A) = \{M \in M_n(A): \det(M) \in U(A,\cdot)\}$ şi

$SL_n(A) = \{M \in M_n(A): \det(M)=1\}$.

Să se demonstreze că $GL_n(A)$ este un grup relativ la înmulţirea matricelor iar $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$.

Observaţie. Grupurile $GL_n(A)$ şi $SL_n(A)$ poartă numele de *grupul liniar general* (respectiv *special*) de grad n peste inelul A.

9.51. Dacă K este un corp finit cu q elemente, să se demonstreze că:

$$|\, GL_n(K)\, | = (q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1}).$$

9.52. Fie G un grup finit şi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(n, |G|) = 1$.

Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in G$ există şi este unic $y \in G$ astfel încât $y^n = x$.

Să se deducă de aici că dacă $y, z \in G$ şi $y^n = z^n$, atunci $y = z$.

9.53. Fie $G = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că :

(i) $G = U_n$;

(ii) Există relaţia :

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \text{ nu este multiplu de } n \\ n, & \text{dacă } k \text{ este multiplu de } n \end{cases}.$$

(M. Ţena)

9.54. Fie G un grup astfel încât există $A \subset G$ finită şi nevidă cu proprietatea că $G \setminus A$ este un subgrup al lui G.

(i) Să se arate că G este finit şi $|G| \le 2|A|$;

(ii) Dacă $|A|$ este prim, atunci $|G| = 2|A|$ sau $|G| = |A| + 1$.

9.55. Fie A, B, C subgrupuri ale unui grup G.

Să se demonstreze că :

(i) Dacă $A \le B$, atunci $|\, B : A \,| \ge |\, (C \cap B) : (C \cap A)\, |$;

(ii) $|\, G : (A \cap B)\, | \le |\, G : A\, | \cdot |\, G : B\, |$;

(iii) $|\, (A \vee B) : B\, | \ge |\, A : (A \cap B)\, |$.

Suplimentar, dacă $|\, G : A\, |$ şi $|\, G : B\, |$ sunt finite şi prime între ele să se arate că :

(iv) $|\, G : (A \cap B)\, | = |\, G : A\, | \cdot |\, G : B\, |$;

(v) Dacă în plus G este finit, atunci $G = AB$.

9.56. Să se demonstreze că pentru $n \ge 3$, $\mathbf{D_n}$ are un singur subgrup de ordin n.

9.57. Fie $n \ge 3$. Să se demonstreze că dacă n este impar, atunci $|Z(\mathbf{D_n})| = 1$ iar dacă n este par, atunci $|\, Z(\mathbf{D_n})\, | = 2$.

Capitolul 10 : Complemente de algebră liniară

10.1. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ iar $\overline{A}$ matricea ce se obţine din A înlocuind fiecare element prin conjugatul său. Să se demonstreze că:

(i) $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$;

(ii) $\det(A \cdot \overline{A}) = |\det(A)|^2 \ge 0$;

(iii) Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ şi $AB=BA$, atunci $\det(A^2+B^2) \ge 0$;

(iv) Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$, atunci $\det(A^2+I_n)\geq 0$.

10.2. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Să se arate că :

(i) A verifică ecuația matriceală $X^2-(a+d)X+\det(A)I_2 = O_2$;

(ii) Dacă există $k\geq 2$ astfel încât $A^k = O_2$ şi $A\neq O_2$ atunci $A^2 = O_2$.

10.3. Să se determine $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det(A^3-A^2) = 1$.

10.4. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Să se determine $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(L. Panaitopol)

10.5. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = I_n$. Să se demonstreze că pentru orice $X\in M_n(\mathbb{R})$, există $Y, Z\in M_n(\mathbb{R})$ unice astfel încât $X = Y + Z$, $AY = Y$ şi $AZ = -Z$.

10.6. Fie $A, B\in M_n(\mathbb{R})$ ($n\geq 2$) astfel încât $A^2+B^2 = O_n$.
Să se demonstreze că :

(i) Dacă $n = 4k$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA)\geq 0$;

(ii) Dacă $n = 4k+2$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA)\leq 0$;

(iii) Dacă $n = 4k+1$ sau $4k+3$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA) = 0$.

10.7. Fie $A, B\in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $ABAB = O_2$, atunci $BABA = O_2$.

Este rezultatul adevărat în $M_3(\mathbb{R})$?

10.8. Fie $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $\alpha\in\mathbb{C}$.
Să se arate că :
(i) $tr(A\pm B) = tr(A) \pm tr(B)$;
(ii) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$;
(iii) $tr(AB) = tr(BA)$;

(iv) Dacă $U\in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci $tr(UAU^{-1}) = tr(A)$

(pentru $A\in M_n(\mathbb{C})$ prin tr(A) am notat suma elementelor lui A de pe diagonala principală; tr(A) poartă numele de *urma* lui A).

10.9. Dacă $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $A+B = AB$, atunci $AB = BA$.

(L. Panaitopol)

10.10. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$.

(i) Calculând în două moduri det(A) să se deducă egalitatea:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca);$$

(ii) Utilizând (i) să se deducă faptul că produsul a două numere de forma $a^3+b^3+c^3-$ $-3abc$ (cu $a, b, c\in\mathbb{Z}$) este de aceeaşi formă.

10.11. Fie a, b, c, a´, b´, c´$\in\mathbb{C}$.

(i) Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & a & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\,;$$

(ii) Utilizând (i) să se deducă identitatea:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c') =$$
$$= A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC,$$

unde A = aa´+bc´+cb´, B = ac´+bb´+ca´, C = ab´+ba´+cc´.

10.12. Fie A$\in$M$_m(\mathbb{C})$, B$\in$M$_{m,n}(\mathbb{C})$ şi C$\in$M$_n(\mathbb{C})$.

Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(C)$$

(unde $O_{n,m}\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ este matricea cu toate elementele egale cu zero).

10.13. Fie A, B, C$\in$M$_n(\mathbb{C})$.

Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} O_n & A \\ B & C \end{pmatrix} = (-1)^n\cdot\det(A)\cdot\det(B)\,.$$

10.14. Fie A, B$\in$M$_n(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \left|\det(A+iB)\right|^2 .$$

10.15. Fie M = $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$.

Să se demonstreze că det(M) = $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

10.16. Fie $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$ şi

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Să se arate că det $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$;

(ii) Dacă mai avem $y_1, y_2, y_3, y_4\in\mathbb{C}$, atunci

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot A(y_1, y_2, y_3, y_4) = A(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

cu
$z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$
$z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$
$z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2$
$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1$;

(iii) Să se deducă din (ii) *identitatea lui Euler* :

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) = z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2\,.$$

10.17. Dacă a, b, c, d∈$\mathbb{C}$, atunci

(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d;$

(ii) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & -1 & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix} = -4[a^2+b^2+c^2+d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)].$

10.18. Să se arate că pentru orice n∈$\mathbb{N}$, n≥3 şi $a_{11}\neq 0$ avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \quad \text{(unde } a_{ij}\in\mathbb{C}\text{).}$$

(Chio)

10.19. Fie A_1, A_2,…, A_n mulţimi finite. Notăm cu a_{ij} numărul de elemente ale mulţimii $A_i \cap A_j$, i, j=1, …, n. Dacă A este matricea $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ să se arate că det(A)≥0.

(C. Năstăsescu)

10.20. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: a_{ij} = max(i, j), oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

10.21. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: a_{ij} = min(i, j), oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

10.22. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: a_{ij} = | i-j |, oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

10.23. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt –1 şi +1.
Să se arate că:
(i) det(A) este un număr par;
(ii) Să se determine valoarea maximă (respectiv minimă) pe care o poate lua det(A).

10.24. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt 0 şi 1.
Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua det(A).

10.25. Fie $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice de ordinul n astfel încât a_{ij}∈{-1, +1}, oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n.
Să se arate că det(A) este un număr întreg multiplu de 2^{n-1}.

(OM - C. Năstăsescu, E. Păltănea)

10.26. Să se calculeze valoarea maximă (respectiv minimă) a determinanţilor de ordinul 4 ale căror elemente sunt –1 şi +1.

10.27. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $(n \geq 2)$.

10.28. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversabilă. Să se demonstreze că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

10.29. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă şi simetrică, atunci şi A^{-1} este simetrică.

10.30. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $A^k = O_2$.
Să se demonstreze că $\det(I_2 + A + \ldots + A^{k-1}) = 1$.

10.31. O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se zice *involutivă* dacă $A^2 = I_n$ şi *idempotentă* dacă $A^2 = A$. Să se demonstreze că:

(i) Dacă A este idempotentă atunci $2A - I_n$ este involutivă;

(ii) Dacă A este involutivă atunci $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

10.32. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ ce are elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{1}{2}$ iar suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană egală cu 1.
Să se arate că $\det(A) > 0$.

(M. Bencze)

10.33. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $X \in M_n(\mathbb{R})$ ce are toate elementele egale. Să se arate că

$$\det(A+X) \cdot \det(A-X) \leq \det^2(A).$$

(M. Dădârlat)

10.34. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, atunci

$$(*)\ \det(A+B) + \det(A-B) = 2[\det(A) + \det(B)].$$

Reciproc, dacă avem $n \geq 2$ astfel încât $(*)$ este verificată pentru orice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $n = 2$.

(D. Buşneag)

10.35. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ cu $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Să se demonstreze că, dacă pentru numărul natural $n \geq 1$ notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, atunci $\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a - d}$, pentru orice $n \geq 1$.

(M. Dădârlat)

10.36. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze că pentru orice $n \geq 2$ există matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ nenule, distincte şi astfel încât $A = X^n + Y^n$.

(D. Buşneag)

10.37. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 = A + I_n$.

Să se demonstreze că $\det(A) > 0$.

10.38. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ să avem $A^k = A + I_n$. Să se demonstreze că:

(i) Pentru k impar avem $\det(A) > 0$;

(ii) Pentru k par şi n impar concluzia de la punctul (i) nu mai este neapărat adevărată.

(D. Buşneag)

10.39. Să se demonstreze că, dacă A, B, $C \in M_n(\mathbb{R})$, iar aceste matrice comută între ele, atunci $\det(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \geq 0$.

10.40. Fie A, $B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(AB+BA) \leq 0$.

Să se arate că $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

(OM-C. Mortici)

10.41. Dacă A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci $\det(\alpha I_n + AB) = \det(\alpha I_n + BA)$, iar apoi să se deducă faptul că dacă $P \in \mathbb{C}[X]$, atunci $\det P(AB) = \det P(BA)$.

10.42. Fie $B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $B^2 = O_2$. Arătaţi că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{R})$ au loc inegalităţile: $\det(AB+BA) \geq -1$ şi $\det(AB-BA) \leq 1$.

10.43. Fie A, $B \in M_2(\mathbb{R})$. Să se calculeze det(A) ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:

(i) $\det(A+B) + \det(A - C_n^1 B) + \det(A + C_n^2 B) + \ldots + \det(A + (-1)^n C_n^n B) = 0$

(ii) $\det(B^2+I_2) = 0$.

10.44. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^p = O_2$;

(ii) există a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = a \cdot \begin{pmatrix} \cos b & 1+\sin b \\ -1+\sin b & -\cos b \end{pmatrix}$.

10.45. Fie A, B, $C \in M_n(\mathbb{C})$, B fiind inversabilă.

Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $ABC = AB + BC$;

(ii) $CB^{-1}A = CB^{-1} + B^{-1}A$.

10.46. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A \neq \lambda I_2$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Să se arate că ecuaţia $X^{-1} \cdot X^t = A$ admite soluţii $X \in M_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă există $p \in \mathbb{R} - \{2)$ astfel încât $A^2 + I_2 = pA$.

10.47. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = d \neq 0$, astfel încât $\det(A + dA^*) = 0$.

Să se arate că $\det(A - dA^*) = 4$.

10.48. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ cu $a+d > 2$.

Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$.

(OM-L. Panaitopol, I. Tomescu)

10.49. Fie A, B, $C \in M_2(\mathbb{R})$, matrice care comută două câte două, astfel încât numerele det(A), det(B), det(C) sunt nenule şi nu au toate acelaşi semn.

Să se demonstreze că $\det(A^2+B^2+C^2) > 0$.

(D. Buşneag)

10.50. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A \neq O_2$ cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $A+A^t=aI_2$. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ există $b \in \mathbb{R}$ (care depinde de m) astfel încât $A^m+(A^t)^m=bI_2$.

10.51. Fie matricele nenule $A_0, A_1, \ldots, A_n \in M_2(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ cu proprietățile: $A_0 \neq aI_2$, $a \in \mathbb{R}$ şi $A_0A_k = A_kA_0$, pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Să se arate că:

(i) $\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) \geq 0$;

(ii) Dacă $\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) = 0$ şi $A_2 \neq aA_1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, atunci $\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = O_2$.

(OM-V. Pop)

10.52. Să se arate că pentru orice $A \in M_2(\mathbb{C})$ există $C \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^* = C \cdot A^t \cdot C^{-1}$ şi să se determine toate matricele $C \in M_2(\mathbb{C})$ care au această proprietate.

10.53. Fie $A \in M_n(\mathbb{Q})$astfel încât $\det(A + \sqrt[n]{2} I_n) = 0$.

Să se demonstreze că:

$$\det(A-I_n) = \det(A) + (\det(A+I_n))^n.$$

10.54. Se consideră mulţimea matricelor

$$M = \left\{ A : A \in M_n(C),\ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

şi $B \in M_n(\mathbb{C})$. Să se arate că AB = BA, oricare ar fi $A \in M$ dacă şi numai dacă $B \in M$.

(OM - L. Panaitopol)

10.55. Să se arate că dacă A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice inversabile cu proprietatea că $AB + BA = O_n$ şi există a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ astfel încât $aI_n+bA+cB+dAB = O_n$, atunci a = b = c = d = 0.

10.56. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, notăm cu m(A) numărul tuturor minorilor săi nenuli.

Să se arate că:

(i) $m(I_n) = 2^n-1$;

(ii) dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este nesingulară, atunci $m(A) \geq 2^n-1$.

(OM - M. Ghergu)

10.57. Fie A, $B \in M_n(\mathbb{R})$, asemenea în $M_n(\mathbb{C})$ (adică există o matrice inversabilă $P \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât AP = PB). Să se demonstreze că A şi B sunt asemenea şi în $M_n(\mathbb{R})$.

10.58. (i) Fie r, s numere relativ prime, impare şi A, B$\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$AB = BA,\ A^r = I_n \text{ şi } B^s = I_n.$$

Să se arate că matricea A + B este nesingulară.

(OM – M. Becheanu)

(ii) Fie matricele A, B$\in M_n(\mathbb{C})$, care verifică relaţiile:

$$AB = BA,\ A^{1997} = I_n,\ B^{1998} = I_n.$$

Să se arate că matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.

(C. P. Niculescu)

10.59. Fie A un inel comutativ unitar şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Notăm

$$GL_n(A) = \{M\in M_n(A) : \det(M) \text{ este un element inversabil în } A\}$$

$$SL_n(A) = \{ M\in M_n(A) : \det(M) = 1\}$$ (vezi şi exerciţiul **9.50.**).

Să se demonstreze că:

(i) Dacă U, V$\in M_2(\mathbb{Z})$, U=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, V=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci UV$\in SL_2(\mathbb{Z})$ şi pentru orice $M\in SL_2(\mathbb{Z})$ există matricele $T_1, \ldots, T_r\in\{U, V\}$ şi numerele $t_1, \ldots, t_r\in\mathbb{Z}$ astfel încât $M = T_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot T_r^{t_r}$;

(ii) Dacă mai considerăm şi W$\in M_2(\mathbb{Z})$, W=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci W$\in GL_2(\mathbb{Z})$ şi pentru orice $M\in GL_2(\mathbb{Z})$ există matricele $R_1, \ldots, R_s\in\{U, V, W\}$ şi numerele $r_1, \ldots, r_s\in\mathbb{Z}$ astfel încât $M = R_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot R_s^{r_s}$.

10.60. Fie A$\in M_{3,2}(\mathbb{C})$, B$\in M_{2,3}(\mathbb{C})$ astfel încât AB=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze det(BA).

(OM-Gh. Eckstein)

10.61. Demonstraţi că dacă n-1 linii ale unui determinant D de ordin $n\geq 4$ au elementele în progresie aritmetică, atunci D = 0.

10.62. Fie p şi q două numere reale astfel încât $p^2-4q < 0$. Să se arate că dacă n este un număr natural impar şi A$\in M_n(\mathbb{R})$, atunci $A^2+pA+qI_n \neq O_n$.

(OM - T. Andreescu, I. D. Ion)

10.63. Fie A$\in M_n(\mathbb{R})$ o matrice astfel încât $A^n = \alpha A$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\pm 1$.
Să se arate că matricea $B = A+I_n$ este inversabilă.

(OM - C. Cocea)

10.64. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbb{R}$ distincte două câte două astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{\pi}{2}$. Se defineşte matricea A$\in M_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{kp})_{1\leq k,p\leq n}$, unde $a_{kp} = \cos(x_k - kx_p) + i\sin(x_k - kx_p)$, k, p$\in\{1, \ldots, n\}$.

Să se arate că det(A)$\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă n este impar.

10.65. Fie A, B$\in M_k(\mathbb{R})$ cu AB =BA. Să se arate că $\det(A+B)\geq 0$ dacă şi numai dacă $\det(A^n+B^n) \geq 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

10.66. Să se determine matricele $A\in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $(A^*)^* = A$.

(OM - M. Piticari)

10.67. Să se arate că produsul a două matrice simetrice este o matrice simetrică dacă şi numai dacă matricele comută.

10.68. O matrice $A = (a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ se numeşte *ortogonală* dacă $A\cdot A^t = I_n$.

Arătaţi că pentru ca o matrice pătratică să fie ortogonală este necesar şi suficient ca să aibă loc una dintre următoarele relaţii:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$, pentru orice $1\leq i, j\leq n$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$, pentru orice $1\leq i, j\leq n$.

10.69. Fie $P = a_0+a_1X+...+a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$ ($n \geq 1$) pentru care există $x_1, ..., x_{n+1}\in\mathbb{C}$ diferite două câte două astfel încât $\widetilde{P}(x_1) = ... = \widetilde{P}(x_{n+1}) = 0$, ($\widetilde{P}$ fiind funcţia polinomială ataşată lui P).

Să se arate că $a_0 = a_1 =...= a_n = 0$.

10.70. Să se demonstreze că dacă $P\in\mathbb{R}[X]$, grad(P) = n şi $\int_0^1 x^k\widetilde{P}(x)dx = 0$, $0 \leq k \leq n$, atunci P = 0.

Să se deducă de aici că:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

10.71. Să se demonstreze că dacă $a, b, c\in\mathbb{Z}$, atunci sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az \end{cases}$$

admite numai soluţia banală x = y = z = 0.

10.72. Dacă $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ nu sunt toate nule, atunci sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ bx - ay + dz - ct = 0 \\ cx - dy - az + bt = 0 \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases}$$

admite numai soluţia banală.

10.73. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale distincte două câte două ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$) şi fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$. Dacă notăm cu A_j matricea care se obține din A suprimând coloana ce conține puterile de ordin j ale lui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($j\in\{0, \ldots, n\}$), să se demonstreze că, $\det(A_j) = \sum a_1 a_2 \ldots a_{n-j} \prod\limits_{1\leq k<l\leq n}(a_l - a_k)$, pentru orice $j = 0, \ldots, n$.

(D. Buşneag)

10.74. Fie numerele reale λ, a_i, b_i, c_i, ($i = 1, 2, 3$) astfel încât

$$a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 = a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2 = a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3 .$$

Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

10.75. (i) Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $AA^t = O_n$, atunci $A = O_n$;

(ii) Fie $A, B, C\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $BAA^t = CAA^t$, atunci $BA = CA$;

(iii) Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că există $A'\in M_{n,m}(\mathbb{R})$ astfel încât $AA'A = A$.

Să se arate că ecuația matriceală $AX = B$, unde $B\in M_{m,1}(\mathbb{R})$ este compatibilă dacă şi numai dacă $AA'B = B$. În acest caz să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației considerate este:

$$\{A'B+Y-A'AY : Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

(OM - E. Popa)

10.76. Să se arate că:

(i) Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ este singulară ($\det(A) = 0$), atunci există $B\in M_n(\mathbb{C})$, nenulă, astfel încât $AB = BA= O_n$;

(ii) O matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ este singulară dacă şi numai dacă există o matrice $B\in M_n(\mathbb{C})$, nenulă, astfel încât pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, $(A+B)^p = A^p + B^p$.

(OM - I. Savu)

10.77. Să se determine vectorii şi valorile proprii ai matricelor:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ ($a\neq 0$),

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, (v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.78. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice ale cărei valori proprii sunt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f\in\mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$ şi notăm $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_kI_n$.

Să se arate că $\det(f(A)) = f(\lambda_1)\ldots f(\lambda_n)$.

10.79. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute.

Să se determine valorile proprii ale matricelor:

(i) A^{-1} (dacă există);

(ii) A^2;

(iii) A^k ($k\in\mathbb{N}^*$);

(iv) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_kI_n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

10.80. Fie A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Să se calculeze A^k ($k\in\mathbb{N}^*$) folosind vectori şi valori proprii.

10.81. Fie $A_1, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că $\det(A_1^t A_1 + \ldots + A_m^t A_m) \geq 0$.

Să se deducă de aici că dacă $A_1, \ldots, A_m$ sunt simetrice, atunci $\det(A_1^2 + \ldots + A_m^2) \geq 0$.

(OM - M. Cavachi)

10.82. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Să se demonstreze că $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ pentru orice $B\in M_n(\mathbb{C})$ pentru care $AB = BA$, dacă şi numai dacă $A^n = O_n$.

(D. Buşneag)

10.83. Fie $A\in M_2(\mathbb{Q})$. Să se demonstreze că $\det(2A^2-90A+13I_2) = 0$ dacă şi numai dacă $2A^2-90A+13I_2 = O_2$. Rămâne adevărată afirmaţia dacă $A\in M_2(\mathbb{R})$?

10.84. Fie $a\in(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ şi matricea $A\in M_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$. Să se determine matricea $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = aX$.

10.85. Fie Γ o parte stabilă a mulţimii $M_n(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea astfel încât $-I_n\in\Gamma$. Să se arate că:

(i) Dacă $U\in\Gamma$ şi $\det(U) = \pm1$, atunci $U^{-1}\in\Gamma$;

(ii) Dacă $U\in\Gamma$ şi $\det(U) = 0$, atunci există $V\in\Gamma$, $V \neq O_n$ astfel încât $UV = VU = O_n$.

(M. Ghergu)

10.86. Determinaţi numerele $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care există $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$(AB - BA)^2 = I_n.$$

10.87. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale nenule. Dacă notăm $d_{ij} = (a_i, a_j)$, $i, j = 1,\ldots, n$. Să se arate că $\det(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$.

10.88. Fie $A, B, C, D\in M_n(\mathbb{C})$, A şi C inversabile.

Dacă $A^kB = C^kD$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $B = D$.

(OM - M. Cavachi)

10.89. Să se calculeze A^n unde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, iar $n \in \mathbb{N}$.

10.90. Fie $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n}{2} & \frac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} \\ \frac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} & \frac{(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

(OM - H. Banea)

10.91. În mulțimea matricelor pătratice de ordinul trei cu elemente din $\mathbb{Z}$ considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că pentru orice număr natural n ≥ 1, există numerele naturale x_n şi y_n astfel încât $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_3$, I_3 fiind matricea unitate de ordinul trei.

Să se deducă de aici că $A^n = \frac{2^n}{3} \cdot (A + I_3) + \frac{(-1)^n}{3} \cdot (2I_3 - A)$.

10.92. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se arate că pentru orice număr natural n ≥ 1, există numerele întregi x_n şi y_n astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n & y_n \\ 0 & 1 & x_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; să se găsească relațiile de recurență verificate de x_n şi y_n iar apoi să se calculeze A^n.

10.93. Să se demonstreze că valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) & \sin(x+\delta) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) & \cos(x+\delta) \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix}$$

nu depinde de x, unde α, β, γ,δ, a, b, c,d, e, f, g, h, x∈$\mathbb{R}$.

10.94. Să se demonstreze că x = 1 este rădăcină triplă pentru polinomul

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}.$$

10.95. Fie f : [a, b]→$\mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă şi $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Atunci există c∈(a, b) astfel încât

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \cdot \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

10.96. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}$.
Să se arate că

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1}) x + a_1 a_2 \dots a_n .$$

10.97. Să se calculeze

$$\begin{vmatrix} x + a_{11} & x + a_{12} & \dots & x + a_{1n} \\ x + a_{21} & x + a_{22} & \dots & x + a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x + a_{n1} & x + a_{n2} & \dots & x + a_{nn} \end{vmatrix},$$

unde $x, a_{ij} \in \mathbb{R}$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Capitolul 12 : Soluțiile problemelor propuse

Capitolele : 1-5

(1-5).1. Fie $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ cu p, q$\in\mathbb{Z}$, q$\neq$0. (putem presupune că p şi q nu sunt simultan pare).

Atunci $ax^2 + bx + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$. Cum în fiecare din cazurile (p, q impare) sau (p par, q impar) şi (p impar, q par) numărul $ap^2 + bpq + cq^2$ este impar (căci prin ipoteză a, b, c sunt impare) deducem că $ax^2+bx+c\neq 0$ pentru orice x$\in\mathbb{Q}$, de unde concluzia.

(1-5).2. Presupunem prin absurd că există $r_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$, $1\leq i\leq n$ astfel încât orice x$\in\mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x = x_1r_1+\ldots+ x_nr_n$ cu $x_i\in\mathbb{Z}$, $1\leq i\leq n$ (evident p_i , $q_i \in\mathbb{Z}$ şi $q_i\neq 0$, $1\leq i\leq n$).

În mod evident nu este posibil ca pentru orice $1\leq i\leq n$, $r_i\in\mathbb{Z}$ (căci atunci putem alege $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ şi nu vor exista $x_1, \ldots, x_n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x = x_1r_1+\ldots+ x_nr_n$).

Astfel, scriind $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ cu $(p_i , q_i) = 1$ există indici i astfel încât $1\leq i\leq n$ şi $q_i\neq\pm 1$.

Să alegem q$\in\mathbb{Z}$ astfel încât $q \nmid q_1\ldots q_n$. Alegând $x = \frac{1}{q}$ ar trebui să existe $x_1, \ldots , x_n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{1}{q} = x_1r_1+\ldots+x_nr_n \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_1 \ldots q_n}$ (cu $\alpha \in\mathbb{Z}^*$) $\Leftrightarrow q_1 \cdot \ldots \cdot q_n = \alpha \cdot q$, de unde ar trebui ca $q \mid q_1\ldots q_n$ - absurd.

(1-5).3. Să arătăm la început că $[a, b]\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

Fie $m = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 > \frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a) > \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$, de unde mb-ma>1, adică mb>ma+1.

Deci $mb\geq[mb]>ma$. Notând $[mb] =k$ avem că $mb\geq k>ma$.

Astfel, $ma<k\leq mb$, de unde $a < \frac{k}{m} \leq b$, deci $\frac{k}{m} \in[a, b]\cap\mathbb{Q}$.

Să demonstrăm acum că şi $[a, b]\cap\mathbf{I}\neq\emptyset$.

Pentru aceasta fie $s\in(a, b)\cap\mathbb{Q}$ şi $r\in(a, s)\cap\mathbb{Q}$. Atunci $(r, s)\subset(a, b)$ cu r, s $\in\mathbb{Q}$ şi pentru orice m, n $\in\mathbb{Z}^*$ avem $\frac{m}{n}\sqrt{2} \in\mathbf{I}$. Dacă $\frac{p}{q} \in(0, s-r)\cap\mathbb{Q}$ atunci $0 < \frac{p}{2q}\sqrt{2} < s - r$ şi $\frac{p}{2q}\sqrt{2} \in\mathbf{I}$. Cum $r\in\mathbb{Q}$, $r + \frac{p}{2q}\sqrt{2} \in(r, s)\cap\mathbf{I}$ şi cum $(r, s)\subset(a, b)$ deducem că $r + \frac{p}{2q}\sqrt{2} \in(a, b)\cap\mathbf{I}$, adică $(a, b)\cap\mathbf{I}\neq\emptyset$.

(1-5).4. $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-2)=4k^2-4k+1-4k^2+8k=4k+1$.

Pentru ca rădăcinile $x_{1,\,2} = \frac{1-2k \pm \sqrt{4k+1}}{2k} \in\mathbb{Q}$ trebuie ca $4k+1= n^2$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

Scriind că n=2p+1 cu p∈ℤ obținem că $4k+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$, de unde $k=p^2+p$ cu p∈ℤ.

(1-5).5. Dacă $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, atunci $x-\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$, de unde $x^2-2x\sqrt{a}+a=b+c+2\sqrt{bc}$ egalitate pe care o scriem sub forma $\alpha-2x\sqrt{a}=2\sqrt{bc}$ (cu $\alpha=x^2+a-b-c\in\mathbb{Q}$). Ridicând din nou la pătrat deducem că $\alpha^2+4ax^2-4\alpha\cdot x\sqrt{a}=4bc$.

Dacă $\alpha\cdot x\neq 0$, atunci în mod evident $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$.

Dacă $\alpha\cdot x=0$, atunci $\alpha=0$ sau x=0.

Dacă x=0 atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.

Dacă $\alpha=0$, atunci $x^2=-a+b+c$ sau $a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}=-a+b+c$ $\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}=0$, de unde a=ab=bc=ac=0.

Dacă b=0, (cum a=0) deducem că $x=\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$.

Dacă c=0 atunci $\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.

În toate cazurile am ajuns la concluzia că $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Notând din nou $y=\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ deducem că $y-\sqrt{a}=\sqrt{b}$ deci $y^2-2y\sqrt{a}+a=b$, de unde $2y\sqrt{a}=y^2+a-b$.

Dacă y≠0 atunci din nou $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ şi deducem imediat că şi $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ pe când dacă y=0, atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=0\in\mathbb{Q}$.

Observație. Procedând inductiv după n deducem că dacă $a_1, \ldots, a_n$, $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$ ($a_1, \ldots, a_n\geq 0$), atunci $\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\ldots,\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(1-5).6. Dacă q = 0 sau $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$ concluzia este clară.

Să presupunem că q≠0 şi $\sqrt{r}\notin\mathbb{Q}$.

Dacă prin absurd $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}(3qp^2+q^3r)$, de unde $p^3+3q^2pr=2$ şi $3qp^2+q^3r=0$.

Din $3qp^2+q^3r=0 \Rightarrow q(3p^2+q^2r)=0$ şi cum q≠0 deducem că $3p^2+q^2r=0$, adică p=r=0 şi atunci obținem contradicțiile: 0=2 şi $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$.

(1-5).7. Avem de găsit soluțiile $(a, b)\in\mathbb{Q}^2$ pentru care $5a^2-3a+16=b^2$.

Observăm că o soluție particulară este (0, 4).

Fie $a=a_1$ şi $b=b_1+4$. Înlocuind obținem că $5a_1^2-b_1^2-3a_1-8b_1=0$.

Pentru $(a_1, b_1)\neq(0, 0)$ avem $\frac{b_1}{a_1}=\frac{m}{n}$ cu (m, n)=1.

Înlocuind $b_1=\frac{m}{n}a_1$ obținem $a_1=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2}$ astfel că mulțimea cerută este

$$\{a\in\mathbb{Q} : a=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2},\ m, n\in\mathbb{Z},\ (m, n)=1\}.$$

(1-5).8. Scriem egalitatea (⋆) $a+b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2}=0$ sub forma $b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2}=-a$. Înmulțind ambii membri ai lui (⋆) cu $\sqrt[3]{p}$ obținem $a\cdot\sqrt[3]{p}+b\cdot\sqrt[3]{p^2}=-cp$, de unde sistemul

$$(\star\star)\quad \begin{cases} b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2}=-a \\ a\cdot\sqrt[3]{p}+b\cdot\sqrt[3]{p^2}=-cp \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație a lui $(\star\star)$ cu –b iar pe a doua cu c, prin adunare obținem $\sqrt[3]{p}\cdot\left(ac-b^2\right)=ab-c^2p$, de unde $ac=b^2$ şi $ab=c^2p$. Atunci $abc=c^3p$, adică $b^3=c^3p$, de unde $b=c=0$ (căci în caz contrar am deduce că $\sqrt[3]{p}=\dfrac{b}{c}\in\mathbb{Q}$ - absurd). Rezultă imediat că şi $a=0$.

(1-5).9. ([2]) Până la n=4 se demonstrează uşor prin reducere la absurd, ridicând de câteva ori la pătrat ambii membri (grupați în mod convenabil). În cazul general, vom face o demonstrație prin inducție după numărul factorilor primi diferiți $p_1, p_2, \ldots, p_r$ care divid pe cel puțin unul dintre numerele a_i. Este util să se demonstreze prin inducție o afirmație mai tare:

Există numere întregi $c_1, d_1, \ldots, c_e, d_e$, astfel încât $d_i\neq 0$, $c_i\geq 1$, toți divizorii primi ai numerelor c_i fac parte dintre $p_1, \ldots, p_r$ şi produsul $\left(d_1\sqrt{c_1}+\ldots+d_e\sqrt{c_e}\right)\left(b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n}\right)$ este un număr întreg nenul.

Vom nota $S=b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n}$ şi $S'=d_1\sqrt{c_1}+\ldots+d_e\sqrt{c_e}$.

Dacă r=1, atunci S are forma $b_1\sqrt{p_1}+b_2\sqrt{1}$ şi se poate lua $S'=b_1\sqrt{p_1}-b_2$, atunci $SS'=b_1^2p_1-b_2^2\neq 0$.

Presupunem acum că $r\geq 2$ şi că afirmația noastră este adevărată pentru toate valorile mai mici decât r.

Vom nota prin $S_1, \ldots, S_8$ sumele de forma $\beta_1\sqrt{\alpha_1}+\ldots+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$, unde β_i sunt numere întregi, α_i sunt numere întregi pozitive libere de pătrate, cu divizorii primi cuprinşi între $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, $S_1, \ldots, S_8$ dacă nu se precizează contrariul, se pot egala cu 0.

Suma S poate fi scrisă sub forma $S=S_1+S_2\sqrt{p_r}$, unde $S_2\neq 0$. După presupunerea de inducție există o astfel de sumă S_2 astfel încât $f=S_3S_2$ este un număr întreg nenul. Produsul S_3S are forma $S_3S=S_2S+f\sqrt{p_r}=S_4+f\sqrt{p_r}$, cu $f\neq 0$.

Rămâne de demonstrat că $S_5=(S_3S_4-f\cdot S_3\sqrt{p_r})S=S_4^2-f^2p_r\neq 0$.

Dacă $S_4=0$, atunci este evident. Presupunem că $S_4\neq 0$. Fie $S_4=\beta_1\sqrt{\alpha_1}+\ldots+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$; dacă m=1, atunci $S_4=\beta_1\sqrt{\alpha_1}$; Atunci $S_4^2-f^2p_r=\beta_1^2\alpha_1-f^2p_r\neq 0$ (Într-adevăr, $\beta_1^2\alpha_1$ se divide printr-o putere pară a lui p_r, iar f^2p_r printr-una impară).

Dacă m>1, atunci S_4 poate fi scrisă sub forma $S_4=S_6+S_7\sqrt{p}$, unde p este unul dintre numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, $S_6S_7\neq 0$ şi numerele de sub semnul radicalului din sumele S_6S_7 nu se divid prin p. Atunci $S_5=S_6^2+S_7^2p-f^2p_r+2S_6S_7\sqrt{p}\neq 0$ datorită ipotezei de inducție, pentru că $2S_6S_7\neq 0$.

Din nou din ipoteza de inducție se găseşte un S_6 astfel încât S_5S_6 este un număr nenul g. Vom lua $S'=S_8(S_3S_4-f\cdot S_3\sqrt{p_r})$. Atunci $SS'=S_5S_8=g$.

Observație. În particular, dacă b_i sunt numere raționale oarecare şi a_i numere naturale diferite două câte două, mai mari decât 1 şi libere de pătrate (i=1, 2, …, n ; n>1), atunci numărul $b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n}$ este irațional.

(1-5).10. Din $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>0$ deducem că $7n^2-m^2>0$, adică $7n^2-m^2\geq 1$.

Să arătăm de exemplu că egalitățile $7n^2-m^2=1, 2$ sunt imposibile.

Să presupunem prin absurd că egalitatea $7n^2-m^2=1$ este posibilă. Obținem că $7n^2=m^2+1$.

Dacă $m\equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 1 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 2 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 5 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 3 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 3 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 5 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow m^2+1\equiv 2 \pmod 7$, absurd.

Să presupunem că şi egalitatea $7n^2-m^2=2$ este posibilă, adică $7n^2=m^2+2$.

Dacă $m\equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 2 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 3 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 6 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 4 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 4 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 6 \pmod 7$, absurd.

Dacă $m\equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow m^2+2\equiv 3 \pmod 7$, absurd.

În concluzie $7n^2-m^2\geq 3$, de unde $7\geq \frac{3+m^2}{n^2}$, adică $\sqrt{7}\geq \frac{\sqrt{3+m^2}}{n}$.

Este suficient să demonstrăm că

$$\frac{\sqrt{3+m^2}}{n}\geq \frac{m}{n}+\frac{1}{mn} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3+m^2}}{n}\geq \frac{m^2+1}{mn} \Leftrightarrow \sqrt{3+m^2}\geq \frac{m^2+1}{m} \Leftrightarrow m^2\left(3+m^2\right)\geq \left(m^2+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$m^4+3m^2 \geq m^4+2m^2+1 \Leftrightarrow m^2 \geq 1$, ceea ce este adevărat.

Deci $\sqrt{7}\geq \frac{m}{n}+\frac{1}{mn}$ dar cum $\sqrt{7}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ iar $\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\in\mathbb{Q}$ deducem inegalitatea strictă din enunț.

(1-5).11. Ştim că $2^{\log_2 9}=9$, de unde $\sqrt{2^{\log_2 9}}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9}=3\in\mathbb{N}$.

Putem alege deci $a=\sqrt{2}\in\mathbf{I}$ şi $b=\log_2 9\in\mathbf{I}$.

(1-5).12. Avem

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+...+\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right),$$

de unde egalitatea din enunț.

(1-5).13. Cum $abc=1$, putem alege $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ cu x, y, z > 0 şi inegalitatea rezultă imediat prin calcul.

(1-5).14. Fie $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=k$ cu $k\in\mathbb{N}$. Atunci $a^2+b^2=kab \Leftrightarrow a^2+b^2-kab=0$.

Cum Δ_a = $k^2b^2-4b^2=b^2(k^2-4)$, pentru ca $a\in\mathbb{N}$ trebuie ca expresia k^2-4 să fie pătrat perfect, adică $k^2-4=s^2$ (cu $s\in\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ $k^2-s^2=4$ $\Leftrightarrow$(k-s)(k+s)=4$\Leftrightarrow$

(1) $\begin{cases} k-s=-4 \\ k+s=-1 \end{cases}$ sau (2) $\begin{cases} k-s=-2 \\ k+s=-2 \end{cases}$ sau (3) $\begin{cases} k-s=4 \\ k+s=1 \end{cases}$ sau

(4) $\begin{cases} k-s=2 \\ k+s=2 \end{cases}$ sau (5) $\begin{cases} k-s=-1 \\ k+s=-4 \end{cases}$ sau (6) $\begin{cases} k-s=1 \\ k+s=4 \end{cases}$.

În cazurile (1), (3), (5) şi (6) obținem că $k=-\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$ sau $k=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$.

În cazul (2) obținem k = -2 $\notin\mathbb{N}$ iar în cazul (4) obținem k = 2 $\in\mathbb{N}$.

Deci s = 0 şi k = 2. Atunci $a^2+b^2 = 2ab$ $\Leftrightarrow$ $(a–b)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ a = b.

(1-5).15. Fie $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ şi să presupunem prin absurd că $x\in\mathbb{Q}_+^*$.

Atunci $x^3=5+3\cdot\sqrt[3]{6}\cdot x$, de unde am deduce că $\sqrt[3]{6}=\frac{x^3-5}{3x}\in\mathbb{Q}$ - absurd !.

(1-5).16. Fie $\alpha=\frac{z+z'}{1+zz'}$. Cum $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$ şi $z'\cdot\overline{z'}=|z'|^2=1$ deducem că $\overline{z}=\frac{1}{z}$ şi $\overline{z'}=\frac{1}{z'}$, astfel că $\overline{\alpha}=\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\cdot\overline{z'}}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}}=\frac{z+z'}{zz'+1}=\alpha$, de unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1-5).17. Fie $\alpha=\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)...(z_n+z_1)}{z_1\cdot...\cdot z_n}$.

Cum $z_i\cdot\overline{z_i}=|z_i|^2=r^2$, pentru orice $1\le i\le n$, deducem că $\overline{z_i}=\frac{r^2}{z_i}$, pentru orice $1\le i\le n$.

Astfel

$$\overline{\alpha}=\frac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})(\overline{z_2}+\overline{z_3})...(\overline{z_n}+\overline{z_1})}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot...\cdot\overline{z_n}}=\frac{\left(\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_3}\right)\cdot...\cdot\left(\frac{r^2}{z_n}+\frac{r^2}{z_1}\right)}{\frac{r^2}{z_1}\cdot...\cdot\frac{r^2}{z_n}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)\cdot...\cdot\left(\frac{1}{z_n}+\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1\cdot...\cdot z_n}}=\frac{(z_1+z_2)...(z_n+z_1)}{z_1...z_n}=\alpha,$$ de unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1-5).18. Să arătăm la început că $D_0=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}\subseteq M$. Cum $|\pm1|=1$ $\Rightarrow$-1, $1\in M$, adică $0=(-1)+1\in M$. Fie acum $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $0<|z|<1$. Considerăm în planul raportat la sistemul de axe x0y cercul de centru O şi rază 1 şi punctul A de afix z situat în interiorul cercului :

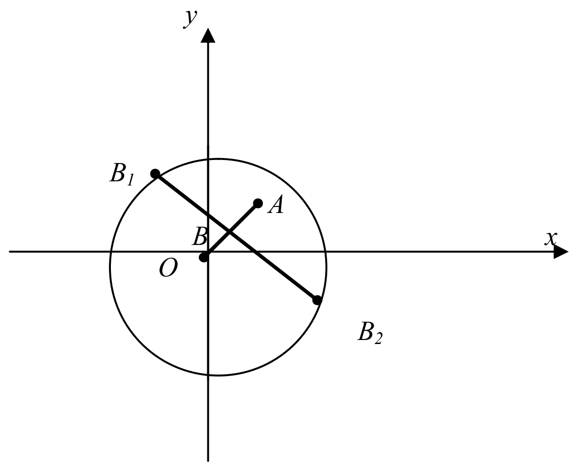

Fig. 2

Dacă B este mijlocul lui OA, atunci B are afixul $\frac{z}{2}$. Perpendiculara în B pe OA taie cercul în B_1 şi B_2. Dacă B_i are afixul z_i , i=1, 2, atunci $z=z_1+z_2$ (căci în Fig. 2, OB_1AB_2 este romb).

Cum $|z_1|=|z_2|=1 \Rightarrow z_1, z_2 \in M$. Atunci $z=z_1+z_2 \in M$, adică $D_0 \subseteq M$.

Să arătăm acum că şi coroana circulară $D_1=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|\le 2\}\subseteq M$.

Pentru $z\in D_1$, $1<|z|\le 2$, deci $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, adică $\frac{z}{2}\in D_0\subseteq M$, deci $\frac{z}{2}\in M$.

Cum $z=2\cdot\frac{z}{2}$ iar $\frac{z}{2}\in M$, deducem că $z\in M$, adică $D_1\subseteq M$.

Analog se demonstrează că în ipoteza $D_n=\{z\in\mathbb{C} : 2^{n-1}<|z|\le 2^n\}\subseteq M \Rightarrow D_{n+1}\subseteq M$ (căci $2^n<|z|\le 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n-1}<\left|\frac{z}{2}\right|\le 2^n \Rightarrow \frac{z}{2}\in D_n\subseteq M \Rightarrow \frac{z}{2}\in M \Rightarrow z=2\cdot\frac{z}{2}\in M$).

Deci $D_n\subseteq M$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, şi cum $\mathbb{C}=\bigcup\limits_{n\ge 0} D_n$ deducem că $\mathbb{C}\subseteq M$; cum $M\subseteq\mathbb{C}$ deducem că $M=\mathbb{C}$.

(1-5).19. Atât (i) cât şi (ii) se deduc prin calcul ţinând cont de faptul că $\alpha^3=1$ şi $1+\alpha+\alpha^2=0$.

(1-5).20. Ţinând cont că pentru orice număr complex $a\in\mathbb{C}$ avem $a\cdot\overline{a}=|a|^2$, putem scrie

$$|x+y|^2=(x+y)\left(\overline{x+y}\right)=(x+y)\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=x\overline{x}+x\overline{y}+y\overline{x}+y\overline{y}=|x|^2+|y|^2+x\overline{y}+y\overline{x} \text{ şi}$$

analog pentru $|y+z|^2$ şi $|x+z|^2$.

Prin adunarea celor trei egalităţi astfel obţinute deducem identitatea din enunţ.

(1-5).21. Se fac calculele în partea dreaptă a egalităţii din enunţ.

(1-5).22. Vezi Corolarul 10.1.20.

Capitolul 6: Câteva principii de rezolvare a problemelor de matematică

6.1. Considerăm numerele $a_k = \underbrace{11...1}_{k\ ori}$ cu $1 \le k \le n+1$, adică $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, ... Conform principiului lui Dirichlet, există $1 \le k < t \le n+1$, astfel încât $a_t \equiv a_k \pmod{n}$, adică $a_t - a_k = pn$, cu $p \in \mathbb{N}$.

Astfel multiplul lui n $a_t - a_k = \underbrace{11...1}_{t-k\ ori}\underbrace{00...0}_{k\ ori}$ are în scrierea sa numai cifrele 0 şi 1.

6.2. (i) Printre cele şase numere ale mulţimii {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5} există cel puţin un multiplu de 5. Dacă ar exista numai unul, partiţia cerută nu se poate face, căci unul din produse ar avea pe 5 ca factor, iar celălalt nu. Deci trebuie să existe doi multipli de 5, ceea ce este posibil doar pentru n şi n+5, care trebuie deci să facă parte din produse diferite şi $n = M_5$.

(ii) Avem n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)>(n+5), deci cu atât mai mult şi (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)>5,

(iii) Avem n(n+1)(n+2)(n+3)>(n+4)(n+5) pentru n = 5, 10, 15, şi cu atât mai mult alte combinaţii, cu n+4 la stânga.

(iv) Avem n(n+3)(n+4)<(n+1)(n+2)(n+5) şi cu atât mai mult pentru alte combinaţii, cu n+1 sau n+2 la stânga.

În concluzie, pentru toate posibilitătile de partiţie, produsele nu pot fi egale, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

6.3. Fie $C_1, C_2, ..., C_n$ cele n cercuri înscrise în ABCD cu C_k de diametru d_k (evident $d_k \le 1$).

Prin ipoteză, $\sum_{k=1}^{n} \pi \cdot d_k = 10$ deci $\frac{10}{\pi} = \sum_{k=1}^{n} d_k < n$ şi deci $n \ge 4$.

Să proiectăm $C_1, C_2, ..., C_n$ pe aceiaşi latură a pătratului, spre exemplu pe AB. Proiecţia lui C_k pe AB este un interval I_k de lungime d_k. Cum $\sum_{k=1}^{n} d_k > 3$ şi $0 < d_k < 1$, rezultă imediat că cel puţin patru dintre intervalele $I_1, I_2, ..., I_n$, de exemplu, I_1, I_2, I_3, I_4, se intersectează după un interval I de lungime pozitivă.

Atunci fiecare dreaptă paralelă cu latura AD care trece printr-un punct de pe I intersectează cel puţin cercurile C_1, C_2, C_3 şi C_4 . Evident există o infinitate de astfel de drepte.

6.4. Evident una dintre cele două mulţimi, spre exemplu A, conţine cel puţin două vârfuri consecutive ale lui P. Dacă A conţine trei vârfuri ale lui P, atunci diam(A) $\ge$ $\ge$diam(P) = $a\sqrt{2} \ge \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Dacă A conţine numai două vârfuri consecutive ale lui P, fie ele V_1 şi V_2, atunci B conţine celelalte două vârfuri V_3 şi V_4 (vezi Fig.3). Cum M, mijlocul segmentului V_1V_4, aparţine lui A sau lui B, rezultă că diam(A) sau diam(B) $\ge \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

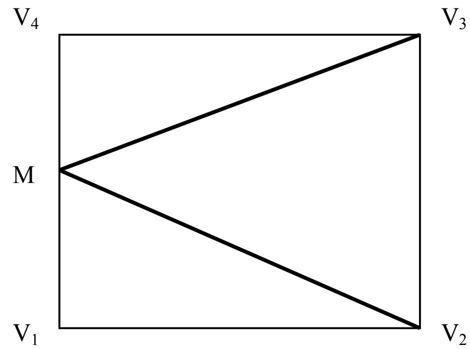

Fig.3

6.5. Se împarte sfera în opt regiuni egale prin trei plane perpendiculare două câte două trecând prin centru.

Conform principiului lui Dirichlet există cel puțin două puncte în aceeaşi regiune.

Evident, distanța dintre ele nu poate depăşi $\sqrt{2}$.

6.6. Dacă două vârfuri opuse ale pătratului sunt la fel colorate, problema este rezolvată.

Fie a, b, c cele trei culori.

În cazul în care două vârfuri ale pătratului nu sunt colorate la fel, se analizează cazurile:

(i) Nici un vârf nu este colorat cu culoarea c;

(ii) Două vârfuri alăturate sunt colorate cu culoarea a, unul cu b şi unul cu c;

(i) Fie A, B, C, D vârfurile pătratului.

Să presupunem că vârfurile A şi D sunt colorate cu culoarea a iar vârfurile B şi C sunt colorate cu culoarea b (vezi Fig.4).

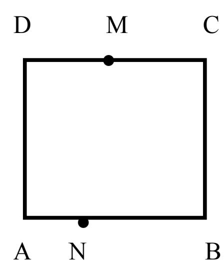

Fig.4

Alegem în acest caz punctele M şi N pe DC şi respectiv AB, astfel încât AN = $\frac{1}{4}$, DM = $\frac{1}{2}$ (pătratul are latura egală cu unitatea).

Dacă M este colorat cu a avem: AM = $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă M este colorat cu b avem: BM = $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă N este colorat cu a avem: DN = $\frac{\sqrt{17}}{4} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă N este colorat cu b avem: CN = $\frac{5}{2} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă M şi N sunt colorate cu c avem: MN = $\frac{\sqrt{17}}{4} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

(ii) Să presupunem că vârfurile A şi D sunt colorate cu culoarea a, vârful B cu culoarea b iar vârful C cu culoarea c.

Fie N $\in$ AB, M $\in$ BC, N′ $\in$ CD astfel încât AN = $\frac{1}{8}$, BM = $\frac{1}{2}$, DN′ = $\frac{1}{8}$.

Dacă M este colorat cu a avem: AM = $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă M este colorat cu b se analizează situaţiile în care poate fi colorat N.

Dacă N este colorat cu a avem: DN = $\frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă N este colorat cu b avem: MN = $\frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă N este colorat cu c avem: CN = $\frac{\sqrt{113}}{8} > \frac{\sqrt{65}}{8}$.

Dacă M este colorat cu c se înlocuieşte N cu N′ (vezi Fig.5).

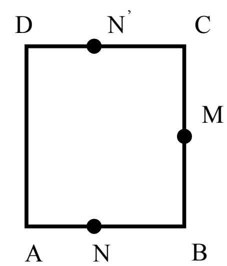

Fig.5

6.7. ([42]) Se observă faptul că locul geometric al punctelor situate la o distanţă mai mică de 1 cm de un poligon convex este un poligon cu laturile paralele poligonului dat şi la distanţa 1 cm de acestea, cu vârfurile rotunjite ca în Fig.6:

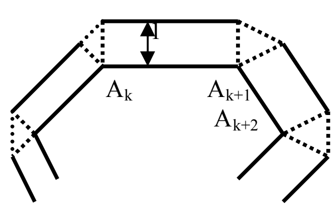

Fig.6

Dacă notăm cu P_i poligoanele din figură şi cu Q_i cu locurile geometrice asociate, ca mai sus, i = 1, 2, ..., 100, avem:

$$S_{Q_i} = S_{P_i} + (perimetrul\ lui\ P_i) \cdot 1 + \pi,$$

deoarece coroanele se completează la un cerc cu raza 1 cm. Deci, $S_{Q_i} \leq \pi + 2\pi + \pi = 4\pi \Rightarrow$
$\sum_{i=1}^{100} S_{Q_i} \leq 400\pi \leq 400 \cdot 3{,}2 < 36^2.$

Deci poligoanele rotunjite Q_i nu pot, conform principiului lui Dirichlet, să acopere pătratul de latură 36 cm, dus în interiorul pătratului dat, cu laturile paralele cu ale acestuia şi la distanţă de 1 cm faţă de ele, ca în Fig. 7. Oricare dintre punctele neacoperite poate fi ales ca centrul cercului cerut.

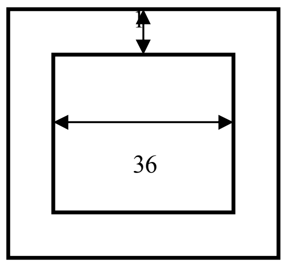

Fig. 7

6.8. Se observă că problema revine la a arăta că dacă benzile de lățime 2 constituite pe coardele respective acoperă cercul dat, atunci m $\geq$ n. Din păcate nu putem face o apreciere a ariei unei astfel de benzi pentru a aplica direct principiul lui Dirichlet.

Vom face următoarea construcție auxiliară: ducem sfera de rază n cu acelaşi centru O ca şi cercul.

Tăiem sfera prin două plane perpendiculare pe planul cercului şi paralele la una dintre coarde A_kB_k şi la distanța 1 de aceasta (vezi Fig.8).

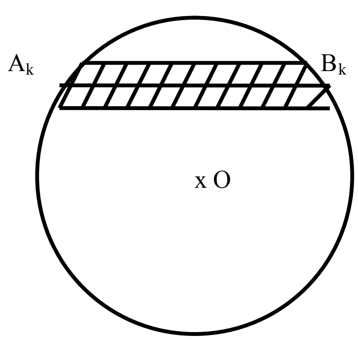

Fig.8

Aria din sferă cuprinsă între cele două plane va fi $S_k \leq 2 \cdot 2\pi n \leq 4\pi n$. Repetând construcția pentru k = 1, 2, ..., m şi aplicând principiul lui Dirichlet,

$$4\pi n^2 \le \sum_{k=1}^{m} S_k \le 4\pi n \cdot m \Rightarrow \text{m} \ge \text{n}.$$

6.9. Orice determinant de ordinul n are n^2 elemente aşezate astfel: n elemente pe diagonala pricipală şi C_n^2 elemente aşezate de fiecare parte a diagonalei principale.

Dacă $n^2 - n + 2$ elemente sunt egale, atunci n-2 elemente diferă de valoarea comună a celor egale. Aceste n-2 elemente pot fi repartizate în cel mult n-2 linii sau coloane. Deci rămân două linii sau coloane identice, ceea ce implică faptul că determinantul este nul.

6.10. Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ numerele din enunţ.

Evident şi $2n - x_1, 2n - x_2, ..., 2n - x_n$ au aceleaşi proprietăţi.

Numerele $x_1, x_2, ..., x_n, 2n - x_1, 2n - x_2, ..., 2n - x_n$ nu pot fi toate distincte deoarece în intervalul (0, 2n) există numai 2n-1 numere naturale distincte. Deci există i, j $\in$ {1, 2, ..., n} astfel încât $a_i = 2n - a_j$, de unde deducem că $a_i = n$ dacă i = j, sau $a_i + a_j = 2n$ dacă $i \ne j$.

6.11. Se consideră q-uplurile $(x_1, x_2, ..., x_q)$ în care $x_j \in \mathbb{Z}$, j = 1, ..., q, cu proprietatea $|x_j| \le p$ este ales în 2p+1 moduri.

Avem inegalitatea $|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{iq}x_q| \le qp$ pentru un astfel de sistem de q numere. Deci numărul sistemelor posibile ($a_{11}x_1 + ... + a_{1q}x_q$, ..., $a_{p1}x_1 + ... + a_{pq}x_q$) care corespund q-uplurilor $(x_1, x_2, ..., x_q)$ considerate nu depăşeşte 2pq+1.

Cum $(2pq+1)^p < (2p+1)^q$, deducem că există două sisteme distincte $(x'_1, x'_2, ..., x'_q)$, $(x''_1, x''_2, ..., x''_q)$ de numere cu proprietăţile amintite astfel încât $a_{i1}x'_1 + ... + a_{iq}x'_q = a_{i1}x''_1 + ... + a_{iq}x''_q$ pentru i = 1, 2, ..., p.

Notând $x_i = x'_i - x''_i$, i = 1, ..., q, găsim soluţia sistemului pe care o căutăm.

6.12. Scriind că $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = \left(a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}\right) + \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$, deducem că

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

şi totul rezultă făcând inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}$.

Dacă n = - m $\in \mathbb{Z}$, cu $m \in \mathbb{N}$ avem că $a^n + \frac{1}{a^n} = a^m + \frac{1}{a^m} \in \mathbb{Z}$ conform celor demonstrate anterior.

6.13. Pentru n = 1 inegalitatea devine $\frac{1 + a_1}{2} \ge \frac{a_1 + x_1}{a_1 + x_1} = 1$, adică $a_1 \ge 1$, ceea ce este adevărat. Presupunând inegalitatea adevărată pentru n, vom demonstra că ea este adevărată şi pentru n+1; aceasta revine la a arăta că

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)(1 + a_{n+1})}{2} \ge \frac{(a_1 + x_1)(a_2 + x_2)...(a_n + x_n)(a_{n+1} + x_{n+1})}{a_1 a_2 ... a_{n+1} + x_1 x_2 ... x_{n+1}}.$$

Din ipoteză avem că

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)}{2} \ge \frac{(a_1 + x_1)(a_2 + x_2)...(a_n + x_n)}{a_1 a_2 ... a_n + x_1 x_2 ... x_n}.$$

Înmulţind ambii membrii ai acestei inegalităţii cu $1+a_{n+1}$ obţinem

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)(1 + a_{n+1})}{2} \ge \frac{(a_1 + x_1)(a_2 + x_2)...(a_n + x_n)(1 + a_{n+1})}{a_1 a_2 ... a_n + x_1 x_2 ... x_n}.$$

Este suficient să demonstrăm că

$$\frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)...(a_n+x_n)(1+a_{n+1})}{a_1a_2...a_n+x_1x_2...x_n} \geq \frac{(a_1+x_1)(a_2+x_2)...(a_n+x_n)(a_{n+1}+x_{n+1})}{a_1a_2...a_na_{n+1}+x_1x_2...x_nx_{n+1}}.$$

Din enunț avem că $x_1 \geq a_1 \geq 1$, $x_2 \geq a_2 \geq 1, \ldots, x_n \geq a_n \geq 1$, ceea ce implică $a_1 + x_1 > 0$, $\ldots$, $a_n + x_n > 0$.

Prin urmare inegalitatea anterioară este echivalentă cu

$$\frac{1+a_{n+1}}{a_1a_2...a_n+x_1x_2...x_n} \geq \frac{a_{n+1}+x_{n+1}}{a_1a_2...a_na_{n+1}+x_1x_2...x_nx_{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1a_2...a_na_{n+1}^2+x_1x_2...x_{n+1}a_{n+1} \geq x_1x_2...x_na_{n+1}+a_1a_2...a_nx_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2...x_na_{n+1}(x_{n+1}-1) \geq a_1a_2...a_n(x_{n+1}-a_{n+1}^2).$$

Această ultimă inegalitate este echivalentă, pentru $x_{n+1} > 1$, cu

$$a_{n+1}\frac{x_1x_2...x_n}{a_1a_2...a_n} \geq \frac{x_{n+1}-a_{n+1}^2}{x_{n+1}-1}.$$

Din $x_1 \geq a_1 \geq 1$, $x_2 \geq a_2 \geq 1, \ldots, x_n \geq a_n \geq 1$, $a_{n+1} \geq 1$ obținem

$$a_{n+1}\frac{x_1x_2...x_n}{a_1a_2...a_n} \geq 1 \geq \frac{x_{n+1}-a_{n+1}^2}{x_{n+1}-1}.$$

Conform principiului inducției matematice inegalitatea cerută este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

6.14. Tratăm la început cazul n = 2 care revine la $x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$, ceea ce este adevărat.

Să presupunem inegalitatea adevărată pentru n-1.

Dacă $y_1 = z_1$ atunci ea se reduce la $\sum_{i=2}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=2}^{n}(x_i - z_i)^2$, care este adevărată conform ipotezei de inducție, deoarece $z_2, \ldots, z_n$ reprezintă în acest caz o permutare a lui $y_2, \ldots, y_n$.

Dacă $y_1 = z_j$ cu $j \neq 1$; atunci conform cazului n = 2 avem

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = (x_1 - z_1)^2 + (x_j - z_j)^2 + \sum_{i \neq 1, j}^{n}(x_i - z_i)^2$$

$$\geq (x_1 - y_1)^2 + (x_j - z_1)^2 + \sum_{i \neq 1, j}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

Pe baza ipotezei de inducție şi a faptului că $z_2, \ldots, z_{j-1}, z_1, z_{j+1}, .., z_n$ este o permutare a lui $y_2, .., y_n$ deducem că $(x_j - z_1)^2 + \sum_{i \neq 1, j}^{n}(x_i - z_i)^2 \geq \sum_{i=2}^{n}(x_i - y_i)^2$, ceea ce încheie trecerea de la n-1 la n.

Conform principiului inducției matematice inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

6.15. *Soluția 1*. Fie P(n) propoziția din enunț.

Dacă n = 1 şi $a_1 \cos x \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci cu necesitate $a_1 = 0$ şi deci $a_1 \cos x = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci P(1) este adevărată.

Să presupunem acum că P(k) este adevărată pentru orice $k \leq n-1$, $k \in \mathbb{N}$, şi să demonstrăm că în această ipoteză rezultă şi P(n) adevărată.

Avem deci că

(1) $\quad a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx \geq 0$,

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă în (1) facem substituția $x \to x + \pi$ atunci (1) devine,

(2) $\quad -a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x ... + (-1)^n a_n \cos nx \geq 0$,

pentru orice x∈ℝ.

Să presupunem că n este par (analog se tratează şi cazul n impar).

Din (1) şi (2), prin sumare rezultă

$2a_2\cos 2x + 2a_4\cos 4x + ... + 2a_n\cos nx \ge 0$, pentru orice x∈ℝ, deci

(3) $a_2\cos 2x + a_4\cos 4x + ... + a_n\cos nx \ge 0$, pentru orice x∈ℝ.

Dacă în (3) substituim 2x = y, obţinem că

(4) $a_2\cos y + a_4\cos 2y + ... + a_n\cos\left(\frac{n}{2}y\right) \ge 0$, pentru orice y∈ℝ.

Aplicând ipoteza de inducţie (k = $\frac{n}{2}$ < n) rezultă că

$a_2\cos y + a_4\cos 2y + ... + a_n\cos\left(\frac{n}{2}y\right) = 0$, pentru orice y∈ℝ ⇔

$a_2\cos 2x + a_4\cos 4x + ... + a_n\cos nx = 0$, pentru orice x∈ℝ.

Astfel (1) devine

(5) $a_1\cos x + a_3\cos 3x + ... + a_{n-1}\cos(n-1)x \ge 0$, pentru orice x∈ℝ.

Dacă în (5) înlocuim pe x cu x+π obţinem

$-a_1\cos x - a_3\cos 3x - ... - a_{n-1}\cos(n-1)x \ge 0$, pentru orice x∈ℝ⇔

(6) $a_1\cos x + a_3\cos 3x + ... + a_{n-1}\cos(n-1)x \le 0$, pentru orice x∈ℝ.

Ţinând cont de (5) şi (6) deducem că

(7) $a_1\cos x + a_3\cos 3x + ... + a_{n-1}\cos(n-1)x = 0$, pentru orice x∈ℝ.

Ţinând cont de (4) şi (7) deducem că $a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n\cos nx = 0$, pentru orice x∈ℝ, adică P(n) este adevărată pentru orice n∈ℕ.

Soluţia 2. Considerăm funcţiile f, F : ℝ→ℝ,

f(x)= $a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n\cos nx$ şi

F(x)= $a_1\sin x + \frac{a_2}{2}\sin 2x + ... + \frac{a_n}{n}\sin nx$.

Evident F este o primitivă a funcţiei f şi F($k\pi$) = 0 pentru orice k∈ℤ.

Cum F′(x) = f(x) ≥ 0 pentru orice x∈ℝ deducem că F crescătoare. Deoarece F este şi periodică rezultă că F este constantă. Ţinând cont că F($k\pi$) = 0 pentru orice k∈ℤ deducem F(x) = 0 pentru orice x∈ℝ. Atunci şi F′(x) = 0, adică f(x) = 0 pentru orice x∈ℝ.

6.16. Pentru n = 1, 2 problema rezultă imediat.

Dacă P(x) este un polinom de grad n natunci există două numere a şi b pozitive, convenabil alese, astfel încât $P(x)=(x+a)^{n-1}(x+b)+Q(x)$, unde Q(x) este un polinom de grad n – 2 şi are coeficienţi pozitivi. Ţinând cont de acestea, realizăm trecerea de la n la n+2. Cum pentru n = 1, 2 afirmaţia este adevărată, ea va fi adevărată pentru orice valoare a lui n.

6.17. Pentru n = 1 relaţia este evident adevărată.

Să presupunem că (1) $\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{a}}{a_1 + \sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

Atunci (2) $\frac{a_{n+1} - \sqrt{a}}{a_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{a}a_n + a}{a_n^2 + 2\sqrt{a}a_n + a} = \left(\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}}\right)^2$.

Ținând cont de (1), (2) devine $\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{a}}{a_{n+1}+\sqrt{a}} = \left[\left(\dfrac{a_1-\sqrt{a}}{a_1+\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right]^2 = \left(\dfrac{a_1-\sqrt{a}}{a_1+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

Conform principiului inducției matematice relația (1) este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

6.18. Să considerăm la început un poligon convex cu n laturi care satisface condiția din enunț.

Considerăm în plan o direcție neparalelă cu nici una din laturi şi tăiem după această direcție două vârfuri ale poligonului astfel încât nici un alt vârf să nu fie îndepărtat în afara celor două (vezi Fig.9).

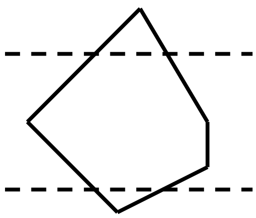
Fig. 9

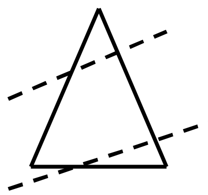
Fig. 10

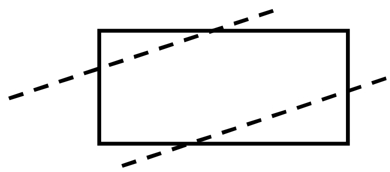
Fig. 11

Obținem astfel un poligon convex cu n+2 laturi, nu toate egale (putem face tăieturile în acest fel). În plus, suma distanțelor unui punct interior la laturile vechiului poligon (care este constantă) plus suma distanțelor la cele două laturi nou apărute, care însă sunt paralele, iar punctul este situate între ele, deci şi această sumă este constantă (egală cu distanța dintre cele două laturi).

Am arătat deci cum se face trecerea de la n la n+2.

Trecerea la 5 se face pornind de la un triunghi ehilateral, iar pentru 4 dispunem de dreptunghi (triunghiul echilateral şi dreptunghiul au proprietatea cerută - vezi Fig. 10, 11).

6.19. Pentru n = 2, totul este evident.

Fie acum n intervale cu proprietatea din enunț şi să notăm cu T intersecția a n-1 intervale (T este un interval) şi conform pasului de inducție $T\neq\emptyset$.

Să notăm cu T_n al n-lea interval şi să presupunem că $T \cap T_n = \emptyset$.

Fie $A_0\in T_n$ punctul cel mai apropiat de T.

Deoarece $A_0\notin T$, există $I\neq T_n$ un interval din mulțimea considerată astfel încât $A_0\notin I$. Pe de altă parte $I\cap T\neq\emptyset$ şi $I\cap T_n\neq\emptyset$.

Fie $A_1 \in I\cap T$ şi $A_2 \in I\cap T_n$. Atunci segmentul $A_1A_2\subset I$, dar $A_0 \in A_1A_2$ (căci în caz contrar A_2 ar fi mai aproape de T decât A_0), ceea ce este contradictoriu (căci ar rezulta $A_0 \in I$).

6.20. Pentru n = 1, 2 totul este clar.

Trecerea de la n la n+1 se face unind convenabil cel de-al n+1 lea punct cu unul din vârfurile liniei frânte construită pentru mulțimea cu n puncte, urmând ca apoi să se realizeze în jurul drumului considerat, linia frântă cerută.

6.21. Propoziția din enunț este adevărată pentru n = 1, luând două puncte din plan la distanța 1.

Să presupunem că există o mulțime E, având de exemplu k elemente şi care satisfac condițiile problemei pentru un m oarecare.

Considerăm o mulțime E′ definită prin translația lui E într-o anumită direcție cu modulul 1. Există cel mult km direcții de translație pentru care două puncte din E şi E′ pot coincide; putem alege deci o direcție pentru care punctele lui E şi E′ să fie toate distincte.

Orice punct din E se află la distanța 1 de omologul său din E′; există atunci cel mult 2(k-1) direcții de translație prin care un punct din E ar putea ajunge la distanța 1 de un punct neomolog (căci cercurile de rază 1 cu centrele în cele două puncte au cel mult două puncte de intersecție). În total putem avea 2k(k-1) astfel de direcții; putem alege din infinitatea de direcții de translație, una pentru care acest lucru să nu se întâmple.

În acest caz reuniunea lui E cu E′ are proprietatea că orice punct are exact m+1 puncte din mulțime (m din ipoteza inducției şi un punct analog) la distanța 1.

Am arătat deci că P(m)⇒P(m+1) şi cum P(1) este adevărată atunci P(m) este adevărată pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

6.22. 1) Să demonstrăm mai întâi că dacă $x_1, x_2, .., x_{p-1}$ sunt numere întregi nedivizibile prin p (p prim, p> 2), iar $S_1, S_2, .., S_m$ sunt sumele elementelor grupărilor ce se pot forma cu aceste numere în toate modurile posibile, atunci oricare ar fi $r \in \{1, 2, …, p-1\}$ există $i \in \{1, 2, …, m\}$ astfel încât $S_i \equiv r (\bmod p)$.

(i). Pentru a dovedi afirmația de mai înainte, demonstrăm prin inducție completă că dacă $x_1, x_2, .., x_k$ sunt numere întregi nedivizibile cu p, atunci dintre numerele $S_1, S_2, .., S_r$ putem extrage k numere care prin împărțire la p, să dea k resturi diferite şi diferite de 0, unde $0 < k \le p-1$.

Pentru k = 1, verificarea este imediată.

Presupunem afirmația adevărată pentru k, 0 < k < p-1 şi o probăm pentru k+1.

Aceasta înseamnă că din numerele $x_1, x_2, .., x_k, x_{k+1}$ putem forma k grupări astfel încât sumele elementelor lor să dea k resturi diferite şi diferite de 0 la împărțirea prin p; fie acestea $y_1, y_2, .., y_k$.

Presupunem că nu mai există un alt grup astfel încât suma elementelor sale să dea la împărțirea prin p un rest diferit de $y_1, y_2, .., y_k$ şi diferit de 0. Se ştie însă că dacă p este prim, şi $x \in \mathbb{N}$ nu este divizibil prin p, atunci numerele 1, x, 2x, …, (p-1)x dau la împărțirea prin p resturile 1, 2, …, p-1 (nu neapărat în această ordine). Din acest motiv există numerele $a_1, a_2, .., a_k \in \{1, 2, …, p-1\}$ astfel încât $a_i x_{k+1} \equiv y_i (\bmod p)$.

Dar x_{k+1} dă la împărțirea prin p unul din resturile $y_1, y_2, .., y_k$ (în caz contrar s-ar contrazice ipoteza); fie acesta y_1, deci $x_{k+1} \equiv y_1 (\bmod p)$, adică $a_1=1$.

Putem presupune $a_1 < a_2 <…<a_k$ şi vom arăta că $a_i + 1= a_{i+1}$.

Într-adevăr, dacă $a_i + 1 \neq a_{i+1}$, considerând grupul format din x_{k+1} şi grupul al cărui rest rezultat prin împărțirea la p a sumei elementelor sale este y_i, atunci suma elementelor sale va da la împărțirea prin p acelaşi rest ca şi numărul $(a_i + 1)x_{k+1}$ şi cum $a_1 < a_2 <…<a_{i-1} < a_i + 1< a_{i+1}$ rezultă că restul obținut va fi diferit de $y_1, y_2, .., y_k$ şi diferit de 0; absurd. Dar cum $a_1 = 1, a_2 = 2, …, a_k = k$, considerând grupul format din x_{k+1} şi grupul a cărui sumă a elementelor dă restul y_k la împărțirea prin p, restul dat la împărțirea prin p de suma elementelor lui va fi acelaşi cu restul dat la împărțirea prin p de numărul $(a_k + 1)x_{k+1}$, deci de numărul $(k + 1)x_{k+1}$, care va fi diferit de $y_1, y_2, .., y_k$ şi diferit de 0 (k+1<p), contradicție.

Deci, cu numerele $x_1, x_2, .., x_k, x_{k+1}$ se pot forma k+1 grupări, k < p-1, astfel încât sumele elementelor lor la împărțirea prin p să dea k+1 resturi diferite de 0, adică tocmai ceea ce trebuia probat.

Proprietatea de la punctual 1) decurge din cele arătate la punctul 2).

3) Vom distinge două situații:

a) dacă $x_1 + x_2 + ...+ x_{p-1}$ este divizibil prin p exercițiul este rezolvat.

b) dacă $x_1 + x_2 + ...+ x_{p-1} \equiv r \pmod p$, $0 < r \le p-1$ atunci conform proprietății 1) cu numerele $2x_1, 2x_2, .., 2x_{p-1}$ putem forma o grupare $(2x_{i_1}, 2x_{i_2}, …, 2x_{i_k})$, astfel încât $2x_{i_1} + 2x_{i_2} +…+ 2x_{i_k} \equiv r \pmod p$. Atunci numărul $\widetilde{x} = x_1 + x_2 + ...+ x_{p-1} - (2x_{i_1} + 2x_{i_2} +…+$

$2x_{i_k}$) va fi divizibil prin p, şi cum x este de forma $e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_{p-1}x_{p-1}$ $(e_i = \pm 1)$, problema este rezolvată.

6.23. Funcţia $\cos(k\pi\alpha)$, cu $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, dat, (m, n∈ℤ şi n > 0) ia cel mult 2n valori distincte când k∈ℤ. Pentru a ne convinge de acest lucru este suficient să ne amintim că rădăcinile ecuaţiei $x^{2n} - 1 = 0$, care sunt exact în număr de 2n, sunt date de relaţia $x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n}$, k = 0, 1, 2, …, 2n-1, şi că pentru orice valoare a lui k, în afară de cele arătate mai sus, nu obţinem numere x_k distincte de rădăcinile ecuaţiei.

Vom arăta prin inducţie că $\cos(t\pi\alpha)$, atunci când, $t = 2^k$, k = 1, 2, … ia o infinitate de valori distincte şi de aici rezultă iraţionalitatea lui α.

În acest scop folosim identitatea $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Cu x = απ, avem $\cos(2\alpha\pi) = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1$, cu 2 care nu se divide în mod evident cu 3.

În continuare scriem $\cos(2^2\alpha\pi) = 2\cos^2(2\alpha\pi) - 1 = 2\left(\frac{2}{9} - 1\right)^2 - 1 = \frac{98}{3^{2^2}} - 1$, cu 98 care nu se divide la 3.

Să presupunem acum că $\cos(2^k\alpha\pi) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$, cu r nedivizibil la 3 şi să arătăm că $\cos(2^{k+1}\alpha\pi) = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1$, cu s nedivizibil la 3.

Într– adevăr $\cos(2^{k+1}\alpha\pi) = 2\cos^2(2^k\alpha\pi) - 1 = 2\left(\frac{r}{3^{2^k}} - 1\right)^2 - 1 =$

$$= \frac{2(r^2 - 2r3^{2^k} + 3^{2^{k+1}})}{3^{2^{k+1}}} - 1 = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1,$$

unde $s = 2(r^2 - 2r3^{2^k} + 3^{2^{k+1}})$.

Evident dacă r nu se divide la 3, nici s nu se divide la 3, căci r^2 nu se divide la 3. Rezultă deci că relaţia $\cos(2^k\alpha\pi) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$, cu r≠3p, p∈ℤ, este adevărată pentru orice k∈ℕ şi astfel $\cos(2^k\alpha\pi)$ nu ia un număr finit de valori (anume 2n valori ca în cazul $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$), ci o mulţime infinită de valori distincte două câte două.

Deci α ∉ℚ, de unde rezultă că α∈ℝ\ℚ.

6.24. Cum 734 de numere se divid fie cu 2, fie cu 3, fie cu 5 (conform aplicaţiei 1 de la Capitolul 6, paragraful 6.3), 1000-734=266 nu se divid nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5.

6.25. Numărul căutat este egal cu numărul funcţiilor surjective definite pe o mulţime cu 5 elemente cu valori într-o mulţime cu 3 elemente, deci este egal cu $S_{5,3} = 3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 + C_3^2 = 150$ (vezi Propoziţia 7.1.11, (iv)).

6.26. Într-adevăr, pentru un punct notat x, fie A_x mulţimea punctelor legate cu x printr-un segment şi să presupunem prin absurd că $|A_x| \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, pentru orice x ∈ X, unde cu X am notat mulţimea celor n puncte din plan.

Să alegem un punct x_1 ∈ X şi în mulţimea A_{x_1} să alegem un punct y_1.

Avem $\left|A_{x_1}\cup A_{y_1}\right|=\left|A_{x_1}\right|+\left|A_{y_1}\right|-\left|A_{x_1}\cap A_{y_1}\right|\geq 2\left[\frac{n}{2}\right]+2-n,$ deoarece $\left|A_{x_1}\cap A_{y_1}\right|\leq\left|X\right|=n.$ Dar $2\left[\frac{n}{2}\right]+2-n=2\left[\frac{n}{2}\right]+1-n+1\geq 1$, deci există $z_1\in A_{x_1}\cup A_{y_1}$, această mulțime conținând cel puțin un element. Am ajuns însă la o contradicție, deoarece x_1, y_1, z_1 sunt vârfurile unui triunghi iar noi am presupus că nu există nici un triunghi cu vârfurile în punctele din X.

Deci există un punct x ∈ X astfel încât $\left|A_x\right|\leq\left[\frac{n}{2}\right]$.

6.27. Vom demonstra problema prin inducție după n.

Pentru n = 1 sau n = 2 rezultatul este imediat, deoarece în primul caz numărul segmentelor este egal cu zero, iar în al doilea caz este egal cu 1.

Să presupunem problema adevărată pentru n puncte şi să o demonstrăm pentru n+1 puncte.

Ştim că există un punct x ∈ X cu $|X|$= n+1 care este extremitatea a cel mult $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ segmente, conform exercițiului 6.26. Dar mulțimea de puncte X \ {x} poate fi unită prin cel mult $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ segmente astfel încât să nu se formeze nici un triunghi cu vârfurile în aceste puncte, deci numărul total de segmente care unesc punctele din mulțimea X (cu n+1 puncte) este majorat de $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Vom demonstra că acest număr este egal cu $\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$.

Într - adevăr fie n = 2k cu k∈ℕ.

Atunci $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{4}\right]=k+k^2=\left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right],$ deoarece

$$\left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right]=\left[\frac{4k^2+4k+1}{4}\right]=\left[k(k+1)+\frac{1}{4}\right]=k(k+1)\,.$$

Dacă n = 2k+1 cu k∈ℕ, atunci

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{4}\right]=k+1+\left[\frac{4k^2+4k+1}{4}\right]=\mathrm{k+1+k(k+1)}=(\mathrm{k}+1)^2=\frac{(n+1)^2}{4}\,.$$

Deci am arătat că $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n^2}{4}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$ şi cu aceasta demonstrația este încheiată.

Observație. Pentru a obține exact $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ segmente de dreaptă între cele n puncte astfel încât să nu se formeze nici un triunghi cu vârfurile în aceste puncte, se poate proceda astfel: se grupează cele n puncte în două clase care conțin respectiv $\left[\frac{n}{2}\right]$ şi $n-\left[\frac{n}{2}\right]$ puncte şi se uneşte fiecare punct cu toate punctele care nu aparțin aceleiaşi clase cu el.

6.28. Să scriem descompunerea lui n în factori primi $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_q^{\alpha_q}$ şi să notăm cu A_i mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu n care sunt multipli de p_i (i = 1, 2, …, q, q∈ℕ).

Avem $|A_i| = \frac{n}{p_i}, |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$, ş.a.m.d.

Pentru a obţine numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu n şi care sunt prime cu n, trebuie să scădem din numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu n, numărul numerelor mai mici sau egale cu n care nu sunt prime cu n, adică aparţin mulţimii $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q$.

Deci φ(n) = $n - \left[\sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le q} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{q-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_q|\right]$

$= n - \sum_{i=1}^{q} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le q} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1\le i<j<k\le q} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \ldots\ldots$

Dând factor comun pe n, obţinem

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_q}\right).$$

6.29. Să notăm cu A mulţimea celor (n-1)! permutări care admit o coincidenţă în i şi să aplicăm principiul includerii şi excluderii pentru a găsi numărul permutărilor care admit cel puţin o coincidenţă.

Acest număr este egal cu

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Dar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Pe de altă parte, k poziţii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulţimea celor n poziţii în C_n^k moduri.

Deci $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$.

Numărul permutărilor de n obiecte fără coincidenţe se obţine scăzând din numărul tuturor permutărilor, care este egal cu n!, numărul permutărilor care admit măcar o coincidenţă . Deci $P(n) = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^n C_n^{n-1}$.

Capitolul 7 : Clase de funcţii

7.1. (i). Fie E = AΔ(BΔC) şi F = (AΔB)ΔC. A demonstra că E = F este echivalent cu a arăta că $\varphi_E = \varphi_F$. Avem:

$\varphi_E = \varphi_{A\Delta(B\Delta C)} = \varphi_A + \varphi_{B\Delta C} - 2\varphi_A\varphi_{B\Delta C} = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - 2\varphi_B\varphi_C - 2\varphi_A(\varphi_B + \varphi_C - 2\varphi_B\varphi_C)$

$= \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - 2(\varphi_A\varphi_B + \varphi_B\varphi_C + \varphi_C\varphi_A) + 4\varphi_A\varphi_B\varphi_C$.

Analog se demonstrează că:

$\varphi_F = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - 2(\varphi_A\varphi_B + \varphi_B\varphi_C + \varphi_C\varphi_A) + 4\varphi_A\varphi_B\varphi_C$,

de unde rezultă că $\varphi_E = \varphi_F$, adică E = F.

(ii), (iii). Se demonstrează ca şi (i).

Observaţie. Egalităţile de la (ii) şi (iii) poartă numele de *relaţiile lui De Morgan*.

7.2. Iată o primă soluţie cu ajutorul funcţiei caracteristice.

Din A∩X= B∩X ⇒ $\varphi_A \varphi_X = \varphi_B \varphi_X$; din A∪X = B∪X ⇒ $\varphi_A + \varphi_X - \varphi_A \varphi_X = \varphi_B + \varphi_X - \varphi_B \varphi_X$ ⇒ $\varphi_A - \varphi_A \varphi_X = \varphi_B - \varphi_B \varphi_X$; astfel deducem $\varphi_A = \varphi_B$ ⇒ A = B.

O altă soluţie obţinem scriind

A = A∩(A∪X) = A∩(B∪X) = (A∩B)∪(A∩X) =

= (A∩B)∪(B∩X) = B∩(A∪X) = B∩(B∪X) = B.

7.3. Din $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$ deducem

$$\varphi_{A\cup(B\setminus X)} = \varphi_{B\cup X} \Leftrightarrow \varphi_A + \varphi_{B\setminus X} - \varphi_A\varphi_{B\setminus X} = \varphi_B + \varphi_X - \varphi_B\varphi_X \Leftrightarrow$$

$\varphi_A + \varphi_B - \varphi_B\varphi_X - \varphi_A\varphi_B + \varphi_A\varphi_B\varphi_X = \varphi_B + \varphi_X - \varphi_B\varphi_X \Rightarrow \varphi_A - \varphi_A\varphi_B + \varphi_A\varphi_B\varphi_X = \varphi_X$.

Cum $A \cap B = \emptyset$, $\varphi_A\varphi_B = \varphi_{A\cap B} = \varphi_\emptyset = 0$ şi astfel deducem că $\varphi_A = \varphi_X$, adică $A = X$. Într-adevăr, $X = A$ verifică egalitatea din enunț deoarece $B \setminus A = B$.

7.4. Avem $\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \\ X \setminus Y = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_{X\cup Y} = \varphi_A \\ \varphi_{X\cap Y} = \varphi_B \\ \varphi_{X\setminus Y} = \varphi_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \ \varphi_X + \varphi_Y - \varphi_X\varphi_Y = \varphi_A \\ (2)\ \ \varphi_X\varphi_Y = \varphi_B \\ (3)\ \ \varphi_X - \varphi_X\varphi_Y = \varphi_C \end{cases}$.

Din (1) şi (3) deducem că $\varphi_Y + \varphi_C = \varphi_A \Rightarrow \varphi_Y = \varphi_A - \varphi_C$ (4). Cum $C \subset A$ rezultă că $\varphi_C = \varphi_A\varphi_C$. Astfel, din (4) deducem $\varphi_Y = \varphi_A - \varphi_A\varphi_C = \varphi_{A\setminus C}$ adică, $Y = A \setminus C$.

Înlocuind în (1) pe φ_Y cu valoarea dată de (4) şi ținând cont şi de (2), (1) devine $\varphi_X + \varphi_A - \varphi_C - \varphi_B = \varphi_A$, adică (5) $\varphi_X = \varphi_B + \varphi_C = \varphi_{B\cup C}$ căci $B \cap C = \emptyset$, deci $\varphi_{B\cap C} = \varphi_B\varphi_C = 0$.

Din (5) deducem că $X = B \cup C$. Deci cu necesitate $X = B \cup C$ şi $Y = A \setminus C$.

Să arătăm că aceste valori ale lui X şi Y verifică sistemul.

Avem $X \cup Y = (B \cup C) \cup (A \setminus C) = B \cup C \cup (A \setminus C) = B \cup A = A$, căci prin ipoteză $C \subset A$, deci $(A \setminus C) \cup C = A$; $X \cap Y = (B \cup C) \cap (A \setminus C) = [B \cap (A \setminus C)] \cup [C \cap (A \setminus C)] = B \cap (A \setminus C)$, deoarece $(A \setminus C) \cap C = \emptyset$; Cum $B \subset A$ şi $B \cap C = \emptyset$ deducem că $B \subset A \setminus C$ şi $B \cap (A \setminus C) = B$, deci $X \cap Y = B$; $X \setminus Y = (B \cup C) \setminus (A \setminus C) = (B \cup C) \cap C_T(A \setminus C) = (B \cup C) \cap C_T(A \cap (C_T(C))) =$ $= (B \cup C) \cap (C_T(A) \cup C) = C \cup (B \cap (C_T(A)) = C$, deoarece $B \cap C_T(A) = \emptyset$; deci $X \setminus Y = C$.

Prin urmare sistemul are soluția unică $X = B \cup C$ şi $Y = A \setminus C$.

7.5. Fie $A, B \in P(M)$ astfel încât $A \setminus B$ şi $A \cap B$ sunt nevide.

Dacă $x \in A \setminus B \Rightarrow \psi_A(x) = a$, $\psi_B(x) = b$, $\psi_{A\cap B}(x) = b$.

Dacă $x \in A \cap B \Rightarrow \psi_A(x) = a$, $\psi_B(x) = a$, $\psi_{A\cap B}(x) = a$.

Dacă $x \notin A \cup B \Rightarrow \psi_A(x) = b$, $\psi_B(x) = b$, $\psi_{A\cap B}(x) = b$.

Cum $\psi_{A\cap B} = \psi_A\, \psi_B$ (prin ipoteză), deducem că trebuie să fie simultan adevărate egalitățile $ab = b$, $a^2 = a$, $b^2 = b$, de unde se deduce imediat că $a = 1$ şi $b = 0$.

7.6. (i). Să presupunem de exemplu că $h \circ g \circ f$ şi $g \circ f \circ h$ sunt injective iar $f \circ h \circ g$ este surjectivă (celelalte cazuri se tratează analog). Deducem atunci că f şi h sunt injective iar f este surjectivă, rezultând astfel că f este bijectivă.

Din $h \circ g \circ f$ injectivă şi f bijectivă deducem că $h \circ g$ este injectivă, adică g este injectivă. Din $f \circ h \circ g$ surjectivă şi f bijectivă rezultă că $h \circ g$ este surjectivă, adică h este surjectivă. Cum h este şi injectivă, deducem că este de fapt bijectivă. Din f şi h bijective iar $f \circ h \circ g$ surjectivă deducem că g este şi surjectivă, adică de fapt este bijectivă.

(ii). Ca şi cazul (i).

7.7. Fie funcția $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $e(x) = a^x$, $a > 1$, care este în mod evident strict crescătoare şi bijectivă. Vom demonstra că şi funcția $e \circ g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $(e \circ g)(x) = a^{g(x)}$ este strict crescătoare şi bijectivă. Funcțiile e şi g sunt strict crescătoare deci pentru $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ avem $g(x_1) < g(x_2)$, deci $a^{g(x_1)} < a^{g(x_2)}$, căci $a > 1$. Prin urmare $(e \circ g)(x_1) < (e \circ g)(x_2)$, deci funcția $e \circ g$ este strict crescătoare deci injectivă.

Fiind surjectivă, funcţia g parcurge tot $\mathbb{R}$ iar dacă argumentul funcţiei e (în cazul nostru g(x)) parcurge tot $\mathbb{R}$, atunci funcţia e parcurge tot $\mathbb{R}_+$. Deci funcţia $e\circ g$ este surjectivă căci $(e\circ g)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Fiind şi injectivă $e\circ g$ este bijectivă şi strict crescătoare.

Avem $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (e\circ g)(x) + h(x)$, unde $e\circ g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ iar $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Ambele funcţii fiind crescătoare deducem că pentru $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$ avem $(e\circ g)(x_1) < (e\circ g)(x_2)$ şi $h(x_1) < h(x_2)$, echivalent cu $((e\circ g)+h)(x_1) < ((e\circ g)+h)(x_2)$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, deci f este strict crescătoare şi injectivă.

Pentru a demonstra şi surjectivitatea lui f calculăm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ deoarece $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Cum h este strict crescătoare şi surjectivă avem $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$. Analog $\lim\limits_{x\to-\infty}(e\circ g)(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(e\circ g)(x) = \infty$. Deducem deci că $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Deci $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, adică f este şi surjectivă, deci bijectivă.

7.8. Cum f nu este injectivă există $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b)$.

Fie de exemplu $a < b$; vom arăta că $T = b - a$ este o perioadă pentru f.

Din $f(x + y) = f(y + x)$ pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$ deducem că $g(f(x), y) = g(f(y), x)$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. În relaţia $f(x+y) = g(f(x), y)$ valabilă pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, facem pe rând $x = a$, $x = b$ şi obţinem $f(a+y) = g(f(a), y)$ şi $f(b+y) = g(f(b), y)$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$. Cum $f(a) = f(b)$, deducem că $f(a+y) = f(b+y)$ pentru orice $y\in\mathbb{R}$.

Această ultimă egalitate pentru $y = -a$ devine $f(b-a) = f(0)$.

Astfel $f(x + T) = f(x+b-a) = g(f(x), b-a) = g(f(b-a), x) = g(f(0), x) = f(0+x) = f(x)$, adică $f(x+T) = f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este periodică.

7.9. ([18]) Considerăm mulţimile $A_1=\{a_1\}$, $A_2 =\{a_1, a_2\}$,…,$A_{p-1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$.

Dacă funcţia f duce submulţimile lui A_i în diferite elemente $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ale mulţimii $\{0, 1, \ldots, p-1\} = P$, vom arăta cum aceste numere pot fi obţinute utilizând mulţimea A_i.

Cum $q_1 = 0$, $1 \leq q_2 \leq p-1$, $q_2 \equiv a_1 \pmod p$ deducem că $f(\emptyset) = 0 = q_1$, $f(a_1) = q_2$.

Presupunem că numerele $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k < p)$ pot fi obţinute utilizând mulţimea A_i.

Vom proba că prin adăugarea elementului a_{i+1} (adică utilizând mulţimea A_{i+1}) se obţine cel puţin un nou element al lui P.

Să presupunem contrariul. Deci $q_1 \equiv q_{m_1} + a_{i+1} (\mathrm{mod}\, p)$, $q_2 \equiv q_{m_2} + a_{i+1} (\mathrm{mod}\, p)$, …, $q_k \equiv q_{m_k} + a_{i+1} (\mathrm{mod}\, p)$ unde $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{1, 2, \ldots, k\}$, adică $m_1, m_2, \ldots, m_k$ este o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Fie $(1\to m_1 \to m_2 \to \ldots\to 1)$ un ciclu de lungime d $(d \leq k)$ al acestei permutări. Atunci $q_1 \equiv q_1 + da_{i+1} (\mathrm{mod}\, p)$, care este imposibilă.

Astfel, utilizând mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ putem obţine toate elementele mulţimii $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

7.10. Vom arăta la început că dacă $n, k\in\mathbb{N}$ şi $n\geq k$, atunci $f(n)\geq k$ (făcând inducţie matematică după k). Pentru $k=0$ totul este clar căci $f(n)\geq 0$, f(n) fiind un număr natural.

Fie acum $n\geq k+1$; atunci, conform ipotezei $f(n)>f(f(n-1))$. Cum $n-1\geq k$, conform ipotezei de inducţie avem $f(n-1)\geq k$ iar apoi din aceleaşi motive $f(f(n-1))\geq k$ şi astfel $f(n)>f(f(n-1))\geq k \Rightarrow f(n)>k \Rightarrow f(n)\geq k+1$.

Să presupunem prin absurd că există un $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(k)>k$ şi fie $n>k$; atunci $n-1\geq k$, deci $f(n-1)\geq n-1\geq k$. Prin urmare, $n>k \Rightarrow f(n-1)\geq k$. Relaţia $f(n)>f(f(n-1))$ conduce la concluzia: pentru orice n>k, există m>k (anume m = f(n-1)) astfel încât f(m)<f(n), de unde concluzia falsă că {f(n) : n>k} nu are element minimal, rezultând astfel că f(k)=k, pentru orice k∈ℕ, adică $f = 1_{\mathbb{N}}$.

7.11. Din relația $f \circ f = 1_M$ deducem că f este bijectivă deci există $f^{-1} : M \to M$. Vom grupa elementele lui M în perechi (x, y) cu proprietatea că f(x) = y şi x ≠ y (posibil datorită bijectivității lui f). În cadrul acestor grupări vor intra un număr par de elemente iar cum M are un număr impar de elemente, deducem că există x∈M astfel încât f(x) = x.

7.12. Din f(x)+f(x+π) ≥ 0 deducem 2-2Acos(2x)-2Bsin(2x) ≥ 0, pentru orice x∈ℝ. Dacă $A = \sqrt{A^2+B^2}\cos\alpha$ şi $B = \sqrt{A^2+B^2}\sin\alpha$ deducem că $\sqrt{A^2+B^2}\cos(2x-\alpha) \le 1$ pentru orice x∈ℝ; în particular pentru $x = \frac{\alpha}{2}$ obținem $A^2 + B^2 \le 1$.

Din f(x)+f(x+$\frac{\pi}{2}$) ≥ 0 deducem 2-a(cos(x)-sin(x))-b(cos(x)+sin(x)) ≥ 0, pentru orice x∈ℝ, deci $2 - \sqrt{2}a\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}b\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0$ şi procedând ca mai sus, există un unghi β astfel încât $\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-\beta\right) \le \sqrt{2}$ pentru orice x∈ℝ, de unde deducem că $a^2 + b^2 \le 2$.

7.13. Pentru x = y = 0 şi obținem f(0) = -1.
Pentru x = 0 obținem f(y) = f(-y), deci funcțiile f sunt pare.
Fie x = ky, k ∈ ℕ; atunci avem f((k+1)y) - f(ky) = f(ky) – f ((k-1)y) + 2f(y) + 2.
Sumând relațiile obținute pentru k =1, 2, …, p-1 obținem

f(py) - f((p-1)y) = (2p-1)[f(y) + 1].

Adunând acum relațiile de mai sus pentru p = 1, 2, …, n obținem

$f(ny) = n^2$ [f(y) + +1] -1, deci $f(y) = \frac{1}{n^2}[f(ny)+1]-1$.

Atunci $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}[f(1)+1]-1$ şi

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right) = m^2\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)-1 = \frac{m^2}{n^2}[f(1)+1]-1.$$

Deci f este de forma $f(x) = x^2(1+c) - 1$, x∈ℚ unde c = f(1)∈ℚ.
Pentru aceste funcții se poate demonstra uşor egalitatea din enunț.

7.14. Facem x = y = 0 şi obținem f(0) = 0.

Pentru x = 0 obținem f(y)(f(y)-y) = 0 şi deci $f(y) = \begin{cases} 0, y \in E \\ y, y \in R \setminus E \end{cases}$, E⊆ℝ.

Rămâne să găsim mulțimile E.

Pentru y = x avem $xf(2x) = 2f^2(x)$, pentru orice x∈ℝ, iar pentru x = -y găsim $yf(2y) = f^2(-y) + f^2(y)$, adică $xf(2x) = f^2(-x) + f^2(x)$, pentru orice x∈ℝ.

Deducem $f^2(-x) = f^2(x)$, pentru orice x∈ℝ.
Facem x = -x şi avem $-xf(-x+y) + yf(y+x) = f^2(-x) + f^2(y)$ şi deci $-xf(y-x) + yf(y+x) = f^2(x) + f^2(y)$ care împreună cu relația inițială ne dă

(*) $(x^2 + y^2)f(x+y) = (x+y)(f^2(x) + f^2(y))$, pentru orice x, y∈ℝ.

Cum 0 ∈ E avem situațiile

(i) E = {0} şi deci f(x) = x, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

(ii) E ≠ {0} şi deci pentru orice $a \in E\setminus\{0\}$, f(a) = 0.

În (*) facem y = a-x şi obţinem $a(f^2(x) + f^2(a-x)) = 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Cum a≠ 0, deducem $f^2(x) + f^2(a-x) = 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f(x) = 0, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci funcţiile căutate sunt $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = 0 şi f(x) = x.

7.15. Înlocuind pe x cu ix deducem, $f(ix)f(-x) = -x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{C}$. Sumând membru cu membru această relaţie cu cea din enunţ deducem că f(ix)(f(x)+f(-x)) = 0, de unde f(-x) = -f(x), adică funcţia f este impară.

7.16. Prin calcul direct deducem că f(x+4a) = f(x), pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci perioada lui f este 4a.

7.17. Se observă că $f(x)\geq\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, iar apoi se arată că 2a este perioadă pentru f; pentru a = 1, putem lua de exemplu $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 2n\leq x<2n+1,\\ 1, 2n+1\leq x<2n+2\end{cases}$, $n\in\mathbb{Z}$.

7.18. Dacă x = y atunci $2xf(x) = 2x(f(x))^2$.

Dacă x≠0 atunci, $f(x) = (f(x))^2$, care implică f(x) = 0 sau f(x) =1.

Deducem în final f(x) = 0 sau $f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

Se observă că numai f(x) = 0, pentru orice $x \in\mathbb{R}$ şi f(x) = 1, pentru orice $x \in\mathbb{R}$ sunt continue.

7.19. Fie $x_0 \in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0)\neq 0$. Pentru $x = x_0$ şi y = 0 obţinem f(0) = 1. Dacă facem y = x obţinem $(f(x))^2 = f(0) = 1$. Dacă facem y = $\frac{x}{2}$ obţinem $f(x)f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, de unde deducem f(x) = 1, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

7.20. Dacă $z = x+iy$ şi $z' = x'+iy'$ cu $x, y, x', y' \in\mathbb{R}$, atunci din $f(z)=f(z')$ deducem că $\begin{cases}2x+\sqrt{x^2+y^2}=2x'+\sqrt{x'^2+y'^2}\\ 2y=2y'\end{cases}$. Deducem imediat că $y=y'$ şi înlocuind în prima relaţie obţinem că

$$2x+\sqrt{x^2+y^2}=2x'+\sqrt{x'^2+y^2} \Leftrightarrow 2(x-x')=\sqrt{x'^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$2(x-x')=\frac{x'^2-x^2}{\sqrt{x'^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}} \Leftrightarrow (x-x')\left[2+\frac{x+x'}{\sqrt{x'^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0.$$

Deoarece a doua paranteză este nenulă deducem că $x=x'$, adică funcţia f este injectivă. Pentru probarea surjectivităţii lui f, să demonstrăm că pentru orice $z'=x'+iy'\in\mathbb{C}$ există $z=x+iy\in\mathbb{C}$ astfel încât $f(z)=z' \Leftrightarrow \begin{cases}2x+\sqrt{x^2+y^2}=x'\\ 2y=y'\end{cases}$.

Prin calcul direct se deduce imediat că $x=\frac{2x'}{3}-\frac{\sqrt{4x'^2+3y'^2}}{6}, y=\frac{y'}{2}$.

Din cele de mai sus, deducem că $f^{-1}(x'+iy')=x+iy=\frac{2x'}{3}-\frac{\sqrt{4x'^2+3y'^2}}{6}+\frac{y'}{2}\cdot i$.

7.21. (i). „$\Rightarrow$". Avem $f(A\cup B)=((A\cup B)\cap A, (A\cup B)\cap B) = (A, B)$ iar $f(M)=(M\cap A, M\cap B) = (A, B)$, adică $f(A\cup B) = f(M)$ şi cum f este presupusă injectivă deducem că $A\cup B=M$.

„$\Leftarrow$". Fie $X, Y\in P(M)$ astfel încât $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow (X\cap A, X\cap B) = (Y\cap A, Y\cap B) \Leftrightarrow X\cap A = Y\cap A$ şi $X\cap B = Y\cap B$. Rezultă că $(X\cap A)\cup(X\cap B) = (Y\cap A)\cup(Y\cap B)\Leftrightarrow X\cap(A\cup B) = Y\cap(A\cup B) \Leftrightarrow X\cap M = Y\cap M\Leftrightarrow X = Y$, adică f este injectivă.

(ii). „$\Rightarrow$". Considerând elementul $(A, \varnothing)\in P(A)\times P(B)$, cum f este presupusă surjectivă există $X\in P(M)$ astfel încât $f(X) = (A, \varnothing)\Leftrightarrow(A, \varnothing)=(X\cap A, X\cap B)\Leftrightarrow X\cap A=A$ şi $X\cap B=\varnothing$. Din $X\cap B=\varnothing$ deducem $A\cap(X\cap B)=A\cap\varnothing\Leftrightarrow(X\cap A)\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

„$\Leftarrow$". Să presupunem acum că $A\cap B=\varnothing$ şi fie $S_1\in P(A)$, $S_2\in P(B)$. Atunci $f(S_1\cup S_2)= =((S_1\cup S_2)\cap A, (S_1\cup S_2)\cap B)=((S_1\cap A)\cup(S_2\cap A), (S_1\cap B)\cup(S_2\cap B))=(S_1\cup\varnothing, \varnothing\cup S_2)=(S_1, S_2)$, adică f este surjectivă.

(iii). Totul rezultă din (i) şi (ii); ținând cont de (ii) deducem că inversa lui f, $f^{-1}: P(A)\times P(B) \to P(M)$ va fi dată de $f^{-1}(S_1, S_2)=S_1\cup S_2$, pentru orice $(S_1, S_2)\in P(A)\times P(B)$.

7.22. (i). „$\Rightarrow$". Evident.

„$\Leftarrow$". Presupunem prin absurd că A este infinită. Vom construi în această ipoteză o funcție $f : A \to A$ care este injectivă fără a fi însă surjectivă, ceea ce va fi absurd.

Mulțimea A fiind infinită, putem găsi o submulțime strictă a sa, numărabilă, $B=\{a_1,a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Definim $f : A\to A$,

$$f(x)=\begin{cases} a_{i+1}, & pentru\ x=a_i,\ i=1,2,... \\ x, & pentru\ x\in A\setminus B \end{cases}.$$

Evident, f este injectivă dar nu şi surjectivă deoarece $a_1\notin f(A)$.

(ii). „$\Rightarrow$".Evident.

„$\Leftarrow$". Ideea de rezolvare este asemănătoare cu cea folosită la (i): vom construi în ipoteza că A este infinită o funcție $g : A \to A$ care este surjectivă fără a fi însă injectivă. Dacă B este mulțimea de la (i), definim $g:A\to A$ astfel:

$$g(x)=\begin{cases} a_{i-1}, & pentru\ x=a_i,\ i=2,3,... \\ x, & pentru\ x\in A\setminus B \\ a_1, & pentru\ x=a_1 \end{cases}.$$

care este surjectivă fără a fi însă injectivă (deoarece $f(a_1) = f(a_2)$ şi $a_1 \neq a_2$), ceea ce este în contradicție cu ipoteza, rezultând astfel finitudinea lui A.

7.23. Se observă că $f(n)\geq 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Cum g este bijectivă, există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $g(n_0)=0$. Dacă $h(n_0)>0$, $g(n_0)-h(n_0)<0$, contradicție, deci $h(n_0)=0$, adică $f(n_0)=0$.

Cum g este bijectivă, există $n_1\in\mathbb{N}$ astfel încât $g(n_1)=1$.

Dacă $h(n_1)>1$, atunci $g(n_1)-h(n_1)<0$, contradicție, deci $h(n_1)=1$ şi din nou $f(n_1)=0$.

Presupunem că f(n)=0 pentru valorile n = n_0, n_1, …, n_{k-1} pentru care g ia valorile 0, 1, 2, …, k-1.

Deoarece g este bijectivă există un $n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $g(n_k) = k$. Dacă $h(n_k)>k$, atunci $g(n_k)-h(n_k)<0$, contradicție, deci $h(n_k) = k$, adică $f(n_k) = 0$.

Conform principiului inducției matematice f(n) = 0, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

7.24. Avem $f_1(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f_1(x), f_2(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -f_2(x)$.

7.25. Cum f este periodică există T > 0 astfel încât f(x+T) = f(x), pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să presupunem că f este monoton crescătoare. Atunci $f(0)\le f(x)\le f(T)$, pentru orice $x\in[0, T]$.

Cum f(0) = f(T), deducem f(x) = f(T), pentru orice $x \in[0, T]$, deci f este constantă pe [0, T] (deci şi pe $\mathbb{R}$).

7.26. „⇒”. Să presupunem că f este pară şi fie $a\in\mathbb{R}$.

Atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.

În integrala $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ facem schimbarea de variabilă x = -t şi obținem

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt. \text{ Astfel, } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

„⇐”. Să presupunem că $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$. Derivând în raport cu a obținem, f(a) + f(-a) = 2f(a) ⇔ f(a) = f(-a), pentru orice $a\in\mathbb{R}$, adică f este pară.

7.27. Să presupunem că f este impară pe $\mathbb{R}$ şi fie $a\in\mathbb{R}$. Atunci scriind $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ şi făcând în integrala $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ schimbarea de variabilă x = -t obținem

$$F(a) = \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$
$$= -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Dacă pentru orice $a\in\mathbb{R}$, F(a) = $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ este constantă, atunci derivând în raport cu a această ultimă egalitate obținem f(a) + f(-a) = 0, adică f este impară.

7.28. „⇒”. Graficul lui f are drept centru de simetrie punctul C(a, b) dacă şi numai dacă (*) f(a-t) + f(a+t) = 2b, pentru orice $t\in\mathbb{R}$ (punctul C(a, b) trebuie neapărat să facă parte din graficul lui f, adică b = f(a), deoarece f este continuă).

Fie $x \in \mathbb{R}$.

Din relația (*) prin integrare de la 0 la x deducem

$$\int_{0}^{x} f(a-t)dt + \int_{0}^{x} f(a+t)dt = \int_{0}^{x} 2b\,dt \Leftrightarrow$$

$$(**)\quad \int_{0}^{x} f(a-t)dt + \int_{0}^{x} f(a+t)dt = 2bx.$$

Pentru integrala $\int_0^x f(a-t)dt$ facem schimbarea de variabilă a - t = u şi obţinem $\int_0^x f(a-t)dt = -\int_a^{a-x} f(u)du$, iar pentru integrala $\int_0^x f(a+t)dt$ facem schimbarea de variabilă a + t = u şi obţinem $\int_0^x f(a+t)dt = \int_a^{a+x} f(u)du$.

Astfel, relatia (**) devine

$$-\int_a^{a-x} f(u)du + \int_a^{a+x} f(u)du = 2bx \Leftrightarrow \int_{a-x}^{a} f(t)dt + \int_a^{a+x} f(t)dt = 2bx \Leftrightarrow$$

$$(***) \qquad \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = 2bx .$$

„$\Leftarrow$". Dacă relaţia (***) are loc pentru orice x$\in\mathbb{R}$, atunci derivând în raport cu x ambii membri, obţinem f(a+x) + f(a-x) = 2b, adică (*) şi deci C(a, b) este centru de simetrie pentru graficul lui f.

7.29. „$\Rightarrow$". Să presupunem că f este periodică de perioadă T > 0. Avem F´(x) = = f(x + T) – f(x) = 0, adică F este constantă, deci F(x) = F(0) = $\int_0^T f(t)dt$.

„$\Leftarrow$". Dacă F(x) = $\int_x^{x+T} f(t)dt$ este constantă pe $\mathbb{R}$, atunci derivând ambii membri ai acestei ultime egalităţi obţinem, f(x + T) – f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x + T) = f(x), pentru orice x$\in\mathbb{R}$, adică f este periodică de perioadă T.

7.30. Dacă prin absurd există T>0 astfel încât f(x + T) = f(x), pentru orice x $\in\mathbb{R}$, în particular pentru x = 0 obţinem $\cos T + \cos\left(T\sqrt{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos T = \cos\left(T\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow T = 2k_1\pi$ şi $T\sqrt{2} = 2k_2\pi$ cu k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, de unde deducem, $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$, absurd.

7.31. Dacă avem T>0 astfel încât f(x + T) = f(x), pentru orice x $\in\mathbb{R}$, atunci f(T) = f(-T) = f(0), de unde $\sin T = 0, \cos\alpha T = 1 \Rightarrow T = k_1\pi$ şi $\alpha T = 2k_2\pi$ cu k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, de unde deducem, $\alpha = \frac{2k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$.

Capitolul 8 : Inegalităţi

8.1. (i). Rezultă din înmulţirea membru cu membru a inegalităţilor $a+b \ge 2\sqrt{ab}, b+c \ge 2\sqrt{bc}, a+c \ge 2\sqrt{ac}$. Avem egalitate pentru a = b = c.

(ii) Notând a + b = x, b+c = y şi c+a=z inegalitatea este echivalentă cu

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \ge 6,$$

care rezultă din $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \ge 2$ şi $\frac{x}{z}+\frac{z}{x} \ge 2$.

Egalitate avem pentru a = b = c.

(iii). Prin calcule se reduce la $(abc-1)^2 \ge 0$ cu egalitate dacă abc = 1.

8.2. (i), (ii). Notând $x = tg\alpha$ cu $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ inegalitățile capătă formele echivalente $|\sin 4\alpha| \le 1$, respectiv $|\sin 8\alpha| \le 1$.

Egalitate în (i) avem pentru $4\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$, adică $x = tg\frac{\pi}{8}$ iar în cazul (ii) pentru $x = tg\frac{\pi}{16}$.

8.3. Înlocuind $b_i = 1 - a_i$, pentru orice $1 \le i \le n$ şi notând $x = a_1 + ... + a_n$, $y = a_1^2 + ... + a_n^2$ inegalitatea din enunț va fi echivalentă cu

$$(x-y)^2 \ge y(n - 2x + y - n) \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge -2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 \ge 0,$$

ceea ce este evident.

Egalitate avem pentru $a_1 + ... + a_n = 0$.

8.4. Conform inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwartz

$(a_1 a_{\sigma(1)} + ... + a_n a_{\sigma(n)})^2 \le (a_1^2 + ... + a_n^2)(a_{\sigma(1)}^2 + ... + a_{\sigma(n)}^2) = (a_1^2 + ... + a_n^2)^2$, de unde

$$|a_1 a_{\sigma(1)} + ... + a_n a_{\sigma(n)}| \le a_1^2 + ... + a_n^2.$$

Egalitate avem de exemplu dacă σ este permutarea identică a mulțimii {1,2, …, n}.

8.5. ([19]). Alegem $x = \frac{a}{r}, y = \frac{b}{r}$ cu a, b ∈ ℝ şi r > 0. Notând $t = \frac{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{r}$ condiția din enunț devine $1 \le t^2 \le 2$ iar inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{2}{9}(a^2 - ab + b^2)^2 \le t^4(a^4 + b^4) \le 8(a^2 - ab + b^2)^2.$$

Cum t ≥ 1 avem $t^4(a^4 + b^4) \ge a^4 + b^4$ iar $\frac{2}{9}(a^2 - ab + b^2)^2 \le a^4 + b^4$, deoarece se reduce la $(a+b)^2(7a^2 - 10ab + 7b^2) \ge 0$, ceea ce este evident.

Cum $t \le \sqrt{2}$ avem $t^4(a^4 + b^4) \le 4(a^4 + b^4) \le 8(a^2 - ab + b^2)^2$, deoarece se reduce la $(a-b)^4 \ge 0$, ceea ce este evident. Prima egalitate o avem pentru t = 1 şi a = -b adică pentru $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ iar a doua egalitate pentru t = $\sqrt{2}$ şi a = b adică pentru $x = y = \pm\sqrt{2}$.

8.6. Fie $s_i = \sum x_1 x_2 ... x_i$, i=1, 2, …, n. Atunci, elementele x_i, i=1, 2, …, n sunt soluții ale ecuației:

$$P(X) = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} - ... + (-1)^n s_n = 0.$$

Cum implicația de la stânga la dreapta este banală, să presupunem că numerele s_1, s_2, …, s_n sunt pozitive şi să demonstrăm că $x_1, x_2, …, x_n \ge 0$. Dacă, prin absurd există i∈{1, 2, …, n} astfel încât $x_i<0$, atunci (dacă de exemplu, n este impar) deducem că $P(x_i)<0 \Leftrightarrow 0<0$, absurd. Dacă n este par, obținem contradicția $P(x_i)>0 \Leftrightarrow 0>0$.

8.7. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\left(a + \sqrt[3]{b + \sqrt{c}}\right)^{10} \ge abc$.

Considerăm funcţia f : [0, ∞) →ℝ, $f(x)=\left(x+\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}\right)^{10}-xbc$ despre care cu ajutorul lui f ′ se arată că este crescătoare şi astfel $f(a)\geq f(0)=\left(\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}\right)^{10}\geq 0$.

Avem egalitate pentru a = b = c = 0.

8.8. Folosim faptul că dacă a, b ∈ ℂ atunci $|a\pm b|\leq |a|+|b|$.

Astfel, $|1+z|+\left|1+z^2\right|+\left|1+z^3\right|\geq \left|1+z^2\right|+\left|(1+z)-\left(1+z^3\right)\right|=$

$$=\left|1+z^2\right|+|z|\cdot\left|1-z^2\right|=\left|1+z^2\right|+\left|1-z^2\right|\geq\left|1+z^2+1-z^2\right|=2.$$

8.9. Se face inducţie matematică după n; pentru n = 2 se consideră funcţia f : [0, ∞) →ℝ, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ care este crescătoare. Cum $|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|$, deducem că

$$\frac{|z_1+z_2|}{1+|z_1+z_2|}=f(|z_1+z_2|)\leq f(|z_1|+|z_2|)=\frac{|z_1|+|z_2|}{1+|z_1|+|z_2|}=$$

$$=\frac{|z_1|}{1+|z_1|+|z_2|}+\frac{|z_2|}{1+|z_1|+|z_2|}\leq\frac{|z_1|}{1+|z_1|}+\frac{|z_2|}{1+|z_2|}.$$

Egalitatea avem de exemplu pentru $z_1= \ldots = z_n = 0$.

8.10. Cum pentru z = 0 obţinem egalitate, să presupunem că z ≠ 0 şi notând $u=\frac{x}{z}, v=\frac{y}{z}$, inegalitatea din enunț devine

$$|u+v|+|1+u|+|1+v|\leq 1+|u|+|v|+|1+u+v|.$$

Ridicând la pătrat şi ţinând cont că pentru z ∈ ℂ avem $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, obţinem următoarea formă echivalentă:

$$(u+v)(\bar{u}+\bar{v})+(1+u)(1+\bar{u})+(1+v)(1+\bar{v})+2|(u+v)(1+u)|+2|(u+v)(1+v)|+$$
$$+2|(1+u)(1+v)|\leq(1+u+v)(1+\bar{u}+\bar{v})+2(1+|u|+|v|)|1+u+v|+(1+|u|+|v|)^2\Leftrightarrow$$
$$|1+u+v+uv|+\left|u+v+v^2+uv\right|+\left|u+v+u^2+uv\right|\leq$$
$$\leq|u|+|v|+|uv|+|1+u+v|+\left|u+u^2+uv\right|+\left|v+v^2+uv\right|.$$

Această ultimă formă a inegalităţii de demonstrat este adevărată deoarece rezultă din inegalităţile evidente

$$|1+u+v+uv|\leq|1+u+v|+|uv|,$$
$$\left|u+v+v^2+uv\right|\leq|u|+\left|v+v^2+uv\right|,$$
$$\left|u+v+u^2+uv\right|\leq|v|+\left|u+u^2+uv\right|,$$

prin sumare membru cu membru.

Egalitate avem în mai multe situaţii; de exemplu, atunci când unul dintre numerele x, y sau z este 0, sau atunci când toate sunt reale şi pozitive.

8.11. Inegalitatea este echivalentă cu $\left(a_1a_{\sigma(1)}+1\right)\ldots\left(a_na_{\sigma(n)}+1\right)\leq\left(a_1^2+1\right)\ldots\left(a_n^2+1\right)$ şi rezultă din înmulţirea membru cu membru pentru orice 1 ≤ i ≤ n, a inegalităţii evidente

$$\left(a_ia_{\sigma(i)}+1\right)^2\leq\left(a_i^2+1\right)\left(a_{\sigma(i)}^2+1\right).$$

Egalitate avem de exemplu dacă σ este permutarea identică a mulţimii {1,2, …, n}.

8.12. Să presupunem că $\max\limits_{1\le i,j\le n}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)^2=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$.

Atunci inegalitatea din enunț devine $\frac{2}{n}\sqrt{x_1x_2}+\frac{x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1...x_n}$ şi în această formă, inegalitatea rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $\sqrt{x_1x_2},\sqrt{x_1x_2},x_3,...,x_n$.

8.13. Dacă a > 0, a ≠ 1, atunci $f_a:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$, pentru orice x $\in[0,\infty)$ este strict crescătoare. Cum $f=n+\sum\limits_{1\le i<j\le n}f_{a_i/a_j}$, totul este clar.

8.14. Conform identității lui Abel (vezi exercițiul (1-5).21) avem

$$a_1b_1+...+a_nb_n=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+...+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n$$

iar cum $b_1-b_2,b_2-b_3,...,b_{n-1}-b_n,b_n\ge0$ deducem că

$$m[(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+...+(b_{n-1}-b_n)+b_n]\le a_1b_1+...+a_nb_n\le$$
$$\le M[(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+...+(b_{n-1}-b_n)+b_n]\Leftrightarrow mb_1\le a_1b_1+...+a_nb_n\le Mb_1\ .$$

8.15. Dacă de exemplu $b_i=0$, totul este clar. Să presupunem deci că $b_1, \dots, b_n > 0$. Împărțind ambii membri ai inegalității din enunț prin $\sqrt[n]{b_1...b_n}$ şi notând $x_i=\frac{a_i}{b_i}$ pentru orice $1\le i\le n$, inegalitatea devine

$$(*)\ \sqrt[n]{(1+x_1)...(1+x_n)}\ge1+\sqrt[n]{x_1...x_n}\Leftrightarrow(1+x_1)...(1+x_n)\ge\left(1+\sqrt[n]{x_1...x_n}\right)^n.$$

Această ultimă inegalitate este demonstrată în paragraful 7.3 (aplicația 3).

Observație. Pusă sub forma (*) inegalitatea lui Huygens este cunoscută şi sub numele de inegalitatea lui Cauchy.

8.16. ([19]). Prima inegalitate se demonstrează imediat cu inegalitatea mediilor.

Într-adevăr, avem

$$\frac{a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x+a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x+...+a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x}{n}\ge\sqrt[n]{a_1...a_n\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x...\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x}=\sqrt[n]{a_1...a_n}\ .$$

Inegalitatea se verifică cu egal pentru

$$a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x=a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x=...=a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n\,.$$

Pentru a proba a doua inegalitate, considerăm funcția

$f(x)=a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x+a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x+...+a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x$, x ∈ [0, 1], inegalitatea de demonstrat devenind $f(x)\le a_1+a_2+...+a_n$.

Avem

$$f'(x)=a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x\ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right),$$

$$f''(x)=a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x\ln^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x\ln^2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x\ln^2\left(\frac{a_1}{a_n}\right).$$

Exceptând cazul banal avem $f''(x)>0$ pentru orice x ∈ [0, 1], ceea ce înseamnă că f' este strict crescătoare.

Avem $f'(0)=a_1\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_2\ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_n\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)=$

$$=\left(a_1\ln(a_2)+a_2\ln(a_3)+...+a_n\ln(a_1)\right)-\left(a_1\ln(a_1)+a_2\ln(a_2)+...+a_n\ln(a_n)\right).$$

Avem $f'(0)<0$ deoarece n-uplele $(a_1,a_2,...,a_n)$ şi $(\ln a_1,\ln a_2,...,\ln a_n)$ sunt la fel ordonate iar $(\ln a_2,\ln a_3,...,\ln a_1)$ este o permutare circulară a celei de a doua n-uple (vezi Exercițiul 8.4).

Apoi, $f'(1)=a_2\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_3\ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_1\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)=$

$$=\left(a_1\ln(a_1)+a_2\ln(a_2)+...+a_n\ln(a_n)\right)-\left(a_2\ln(a_1)+a_3\ln(a_2)+...+a_1\ln(a_n)\right)$$

şi din nou deducem $f'(1)>0$.

Cum f(0) = f(1), conform unei teoreme a lui Rolle există c $\in$ (0,1) cu $f'(c)=0$ şi atunci f este descrescătoare pe (0,c) şi crescătoare pe (c, 1), deci f(x) $\leq$ max {f(0), f(1)} şi inegalitatea este demonstrată deoarece $f(0)=f(1)=a_1+a_2+...+a_n$.

A doua inegalitate este verificată cu egal când avem fie $a_1=a_2=...=a_n$, fie x = 0 sau 1.

8.17. Utilizând o altă formă a inegalității de la exercițiul 8.15 obținem că

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^n, \text{ unde } a_1, \dots, a_n \geq 0.$$

Această inegalitate este echivalentă cu $\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}-\sqrt[n]{a_1...a_n}\geq 1$.

Dacă substituim $a_i=\frac{i}{k}$, i = 1, 2, …, n, obținem

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right)}-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{k}}\geq 1\Leftrightarrow\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(k+i)}-\sqrt[n]{n!}\geq k .$$

Cum k $\geq$ 1 iar $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n}(k+i)}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(k+i)}$ deducem că $\sqrt[n]{k(k+1)...(k+n)}-\sqrt[n]{n!}\geq k$.

8.18. Fie a = a_n şi b = g_{n-1}. Avem de demonstrat

$$a\geq n\sqrt[n]{ab^{n-1}}-(n-1)b\Leftrightarrow a+(n-1)b\geq n\sqrt[n]{ab^{n-1}}\Leftrightarrow\frac{a+(n-1)b}{n}\geq\sqrt[n]{ab^{n-1}} .$$

Ultima inegalitate reprezintă chiar inegalitatea mediilor aplicată numerelor $a,\underbrace{b,b,...,b}_{de\ n-1\ ori}$.

8.19. (i). Conform inegalității mediilor, putem scrie

$$a_1+a_2+...+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n},$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\geq n\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}},$$

de unde prin înmulțire membru cu membru obținem $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$.

Să demonstrăm a doua inegalitate.

Inegalitatea evidentă $(M-a_i)(a_i-m)\geq 0$ pentru i = 1, 2, …, n este echivalentă cu $\left(\frac{M}{a_i}-1\right)(a_i-m)\geq 0\Leftrightarrow M-\frac{M\cdot m}{a_i}-a_i+m\geq 0$. Pentru i = 1, 2, …, n sumăm cele n inegalități obținute şi avem

$$M\cdot m\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i\leq n\cdot(M+m).$$

Cum $2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)} \le Mm\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i$ deducem că

$$2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)} \le n(M+m) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \le \frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2.$$

Semnul egal corespunde cazului $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = m = M$.

(ii). Prima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor. Pentru a doua, ca şi în cazul (i), avem $x_i + Mm\cdot\frac{1}{x_i} \le M+m$, pentru orice $1 \le i \le n$.

Cum $p_i > 0$ ($1 \le i \le n$), deducem că $p_i x_i + Mm\frac{p_i}{x_i} \le p_i(M+m)$, de unde

$$\sum_{i=1}^{n}p_i x_i + Mm\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}\right) \le (M+m)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right).$$

Ca în cazul (i) deducem $2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}\right)} \le (M+m)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$, de unde

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}\right) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2.$$

Pentru $p_i = 1$, $1 \le i \le n$, obținem (i).

(iii) ([19]). Conform inegalității $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \ge n^2$, pentru $n \ge 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1,\ 2]$, deducem $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2 \ge n^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \ge \frac{n^3}{2}$, ultima inegalitate fiind adevărată deoarece pentru orice $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ avem $a_i \le 2$ şi $\frac{1}{a_i} \ge \frac{1}{2}$.

În prima inegalitate din enunț egalul se atinge pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2$.

Pentru probarea celei de a doua inegalități din enunț de folos ne-ar putea fi cunoaşterea cazului (unui caz) de egalitate, care, se observă uşor este $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

Vrem să probăm că dacă una dintre variabile se înlocuieşte cu 1, indiferent de valorile celorlalte variabile, valoarea expresiei se măreşte, şi astfel a doua inegalitate din enunț se obține dintr-un şir de intercalări, căci plecând de la expresia inițială şi înlocuind pe rând fiecare variabilă cu 1 expresia se măreşte până când toate variabilele sunt înlocuite cu 1, caz în care expresia devine egală cu n^3 şi astfel inegalitatea este probată.

Se pot renota convenabil a_1, a_2, …, a_n astfel încât cel care urmează să fie înlocuit să fie a_n, renotat, a.

Vom mai nota $S=\sum_{i=1}^{n-1}a_i, T=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}$.

Ipoteza se transcrie

$$(S+a)\left(T+\frac{1}{a}\right)^2 \le (S+1)(T+1)^2 \Leftrightarrow \frac{2ST}{a}+\frac{S}{a^2}+T^2a+\frac{1}{a} \le 2ST+S+T^2+1 \Leftrightarrow$$
$$0 \le (a-1)\left(2STa+S(a-1)+T^2a^2+a\right).$$

Cum pentru fiecare $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ avem $1 \le a_i \le 2$ avem şi $a-1=a_n-1 \ge 0$; de asemenea, $a_i \ge \frac{1}{a_i}$, de unde $S \ge T$ şi atunci $2STa \ge 2T^2a \ge T^2a^2$.

Deci este confirmată presupunerea făcută; în consecință egalul în a doua inegalitate se atinge doar pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

(iv). Cum $\bar{z}_i = \dfrac{1}{z_i}$ pentru orice 1≤i≤n, deducem că

$$(z_1 + ... + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + ... + \frac{1}{z_n}\right) = (z_1 + ... + z_n)(\bar{z}_1 + ... + \bar{z}_n) =$$
$$= (z_1 + ... + z_n)\overline{(z_1 + ... + z_n)} = |z_1 + ... + z_n|^2 \geq 0$$

şi cum $|z_1 + ... + z_n|^2 \leq |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = n$ deducem şi cealaltă inegalitate.

8.20. Se ştie că

(1) $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2 \leq \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \cdot \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leq \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}$.

Cum $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ iar $x_1 x_2 ... x_n \geq 1$, deducem

$$(2)\ \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq 1.$$

Din (1) şi (2) deducem (3) $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$.

Din această ultimă inegalitate ținând cont de faptul că $x_1^2 x_2^2 ... x_n^2 \geq 1$ deducem că

$$(4)\quad x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 .$$

Conform inegalității Cauchy – Buniakovski - Schwartz obținem

(5) $(x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3)^2 = (x_1 x_1^2 + x_2 x_2^2 + ... + x_n x_n^2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(x_1^4 + x_2^4 + ... + x_n^4)$.

Din (4) şi (5) deducem $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 \leq x_1^4 + x_2^4 + ... + x_n^4$.

8.21. Fie $x_i = a_i - b_i$ şi $y_i = a_i^{k-1} + a_i^{k-2} b_i + ... + a_i b_i^{k-2} + b_i^{k-1}$, i = 1, 2, …, n.

Din relațiile din enunț deducem că $x_1 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 0$, …, $x_1 + x_2 + … + x_n \geq 0$ şi $y_1 \geq y_2 \geq … \geq y_n \geq 0$. Astfel, utilizând şi identitatea lui Abel (vezi exercițiul (1-5).21) obținem

$$\sum_{i=1}^n a_i^k - \sum_{i=1}^n b_i^k = \sum_{i=1}^n (a_i^k - b_i^k) = \sum_{i=1}^n x_i y_i =$$
$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n) y_n + (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})(y_{n-1} - y_n) + ... + x_1(y_1 - y_2) \geq 0 .$$

Semnul egal corespunde cazului în care $a_i = b_i$, i = 1, 2, …, n.

8.22. Scriem inegalitatea sub forma echivalentă:

$a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc \leq abc$.

Notăm $P(a,b,c) = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$

Avem $P(a,b,c) = a^2(b+c-a) - (b^3 + c^3) + (b^2 c + bc^2) + (ab^2 + c^2 a - 2abc) =$

$= a^2(b+c-a) - (b+c)(b^2 - bc + c^2) + bc(b+c) + a(b-c)^2 =$

$= a^2(b+c-a) - (b+c)(b-c)^2 + a(b-c)^2 = a^2(b+c-a) - (b-c)^2(b+c-a) =$

$= (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

Deci inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc$, evident deoarece notând x = -a+b+c, y = a-b+c, z = a+b-c obținem forma echivalentă

(x+y)(x+z)(y+z)≥8xyz (vezi exercițiul 8.1, (i)),

iar dacă unul dintre numere este negativ inegalitatea este evidentă.

Egalitate avem pentru a = b= c.

8.23. Vom arăta la început că inegalitatea este adevărată pentru toate valorile lui n de forma 2^k cu $k \in \mathbb{N}$.

Dacă n = 2 inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}\geq\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}\Leftrightarrow\left(2+a_1+a_2\right)\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)\geq 2\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(a_1+a_2\right)\left(\sqrt{a_1a_2}-1\right)+2\sqrt{a_1a_2}\left(1-\sqrt{a_1a_2}\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a_1a_2}-1\right)\left(a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}\right)\geq 0,$$

care este evidentă deoarece $a_1a_2\geq 1$ iar $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$.

Dacă n = 4, atunci ținând cont de cazul n = 2 obținem succesiv

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{1+a_3}+\frac{1}{1+a_4}\geq\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}}+\frac{2}{1+\sqrt{a_3a_4}}\geq\frac{4}{1+\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}.$$

Inductiv (după k) deducem că inegalitatea este adevărată pentru toate valorile lui n de forma 2^k cu $k \in \mathbb{N}$.

Fie acum n un număr oarecare iar k cel mai mic număr natural pentru care $n \leq 2^k$.

Considerăm numerele $y_i=\begin{cases}a_i,\ pentru\ \ i=1,2,...,n\\ \sqrt[n]{a_1...a_n},\ pentru\ \ i=n+1,n+2,...,2^k\end{cases}$.

Conform celor stabilite anterior deducem că

$$\frac{1}{1+y_1}+...+\frac{1}{1+y_n}+\frac{1}{1+y_{n+1}}+...+\frac{1}{1+y_{2^k}}\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{y_1...y_ny_{n+1}...y_{2^k}}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}+\frac{2^k-n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{a_1...a_n\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^{2^k-n}}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}+\frac{2^k-n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}\Leftrightarrow\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}.$$

Egalitate avem pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

8.24. *Soluția 1.* Demonstrăm mai întâi că $a_1=a_{\sigma(1)}$, adică σ (1) = 1, pentru ca apoi analog să deducem $a_2=a_{\sigma(2)}$, adică σ(2) = 2,…, $a_n=a_{\sigma(n)}$, adică σ(n)= n.

Să presupunem prin absurd că $a_1\neq a_{\sigma(1)}$; atunci există k ≥ 2 astfel încât $a_1=a_{\sigma(k)}$.

Avem astfel $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ şi $a_1+a_{\sigma(1)}<a_2+a_{\sigma(2)}<...<a_k+a_{\sigma(k)}$. $\max\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}...,a_{\sigma(k)}\}\geq a_k$ deoarece mulțimea conține k termeni şi nu există k-1 termeni mai mici decât a_k.

Fie $\max\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}...,a_{\sigma(k)}\}=a_{\sigma(m)}$; avem $a_m+a_{\sigma(m)}<a_k+a_{\sigma(k)}$.

De asemenea $a_{\sigma(m)}\geq a_k$ şi $a_{\sigma(k)}=a_1$ deci $a_m<a_1$, ceea ce este imposibil.

Deci $a_1=a_{\sigma(1)}$, adică σ (1) = 1.

Soluția 2. Să presupunem că σ nu ar fi permutarea identică. Cum orice permutare diferită de cea identică este un produs de transpoziții, putem presupune că σ este transpoziția (i, j), $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă i < j avem $a_i+a_{\sigma(i)}<a_j+a_{\sigma(j)}\Leftrightarrow a_i+a_j<a_j+a_i$, ceea ce este imposibil, deci σ este permutarea identică.

8.25. Dacă fixăm $n\in\mathbb{N}^*$ şi f({1, 2, …, n}) avem numai un număr finit de posibilități pentru alegerea lui f; fie F mulțimea acestora.

Va exista atunci o funcție injectivă g $\in$ F cu proprietatea că dacă notăm pentru un f $\in$ F, $S_f = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2}$, atunci $S_g \leq S_f$, pentru orice f $\in$ F.

Vom arăta că funcția g este strict crescătoare.

Să presupunem prin absurd că există $1 \leq a < b \leq n$ pentru care $g(a) > g(b)$.

Considerăm h $\in$ F definită astfel : h(a) = g(b), h(b) = g(a) şi h(c) = g(c), pentru orice c $\neq$ a, b. Atunci

$$S_g - S_h = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{h(k)}{k^2} = \frac{g(a)}{a^2} + \frac{g(b)}{b^2} - \frac{h(a)}{a^2} - \frac{h(b)}{b^2} = \left(g(a) - g(b)\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) > 0,$$

ceea ce contrazice alegerea lui g.

Fie acum f $\in$ F. Putem scrie $S_f \geq S_g \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8.26. Fie $S_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Dacă x < 0 atunci evident $S_n(x) > 0$, deoarece $-x^{2k+1} > 0$ pentru k = 0, 1, …, n-1.

Fie acum x > 0. Vom demonstra că $S_n(x) \geq e^{-x}$ şi cum $e^{-x} > 0$, deducem $S_n(x) > 0$.

Fie $D_n(x) = S_n(x) - e^{-x}$. Observăm că $D_n(0) = S_n(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Vom demonstra că $D_n(x)$ este crescătoare.

Se observă că $D_n^{(2n)}(x) = 1 - e^{-x} > 0$. Cum $D_n^{(2n-1)}(x) = x - 1 + e^{-x}$ şi $D_n^{(2n-1)}(0) = 0$ deducem că pentru x >0, $D_n^{(2n-1)}(x) > D_n^{(2n-1)}(0) = 0$. Din aproape în aproape obținem că $D_n(x) > 0$ pentru x > 0.

Observație. Inegalitatea rezultă imediat dacă ținem cont de dezvoltarea în serie Taylor a lui e^{-x}.

8.27. Calculăm membrul drept

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) = \sin^2 x + (a+b)\sin x\cos x + ab\cos^2 x.$$

Astfel inegalitatea de demonstrat devine

$$1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sin^2 x + (a+b)\sin x\cos x + ab\cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (a+b)\sin x\cos x + (ab-1)\cos^2 x.$$

Înlocuim $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ şi inegalitatea de demonstrat devine

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a+b}{2}\sin 2x + (ab-1)\frac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{ab-1}{2} + \frac{ab-1}{2}\cos 2x + \frac{a+b}{2}\sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{ab-1}{2} \geq \frac{ab-1}{2}\cos 2x + \frac{a+b}{2}\sin 2x.$$

Dar $\frac{ab-1}{2}\cos 2x + \frac{a+b}{2}\sin 2x \leq \max_{x\in R}\left[\frac{ab-1}{2}\cos 2x + \frac{a+b}{2}\sin 2x\right] =$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Va fi suficient să demonstrăm că $\sqrt{\left(\frac{ab-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{ab-1}{2}$.

Cum $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{ab-1}{2} = \frac{a^2+b^2+2}{4} > 0$ este suficient să probăm că

$$\left(\frac{ab-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + \left(\frac{ab-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{ab-1}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{ab-1}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{ab-1}{2}\right) - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \ge 0$, ceea ce este evident.

Avem egalitate pentru a = b = 0 şi x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$ cu k $\in \mathbb{Z}$.

8.28. Folosind teorema sinusurilor putem scrie

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin B} \ge 2 \Leftrightarrow \sin C(\sin B + \sin A) \ge \cos(A-B) - \cos(A+B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{B-A}{2} \ge \cos(A-B) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B-A}{2} \ge \cos(A-B) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$3\cos\frac{A-B}{2} \ge 2\cos(A-B) + 1 \Leftrightarrow 3\cos\frac{A-B}{2} \ge 2\left[2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right] + 1 \Leftrightarrow$$

$4\cos^2\frac{A-B}{2} - 3\cos\frac{A-B}{2} - 1 \le 0$. Fie $x = \cos\frac{A-B}{2}$.

Ecuaţia $4x^2 - 3x - 1 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 1$ şi $x_2 = -\frac{1}{4}$. Dar $\left|\frac{A-B}{2}\right| < 90°$, deci $\cos\frac{A-B}{2} \in (0, 1] \subset \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$. Cu aceasta inegalitatea din enunț este probată.

8.29. Inegalitatea se mai scrie $a(1+\cos 2x) + 1 \ge \cos 2y(2\cos 2x + 1) - 2\sin 2y \sin 2x$.

Cum $\max\limits_{x\in R}(\alpha\cos x + \beta\sin x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ va fi necesar şi suficient să determinăm cel mai mic număr real a pentru care

$$a(1+\cos 2x) + 1 \ge \sqrt{(2\cos 2x + 1)^2 + 4\sin^2 2x} \Leftrightarrow a(1+\cos 2x) + 1 \ge \sqrt{5 + 4\cos 2x}.$$

Pentru $\cos 2x = -1 + \varepsilon$ relația anterioară devine

$$a\varepsilon + 1 \ge \sqrt{4\varepsilon + 1} \Leftrightarrow a \ge \frac{\sqrt{4\varepsilon+1} - 1}{\varepsilon} = \frac{4}{1 + \sqrt{1+4\varepsilon}}, \text{ pentru orice } \varepsilon > 0.$$

Deci a ≥ 2. Prin urmare cea mai mică valoare a lui a pentru care inegalitatea este adevărată este 2.

8.30. Fie x, y unghiurile lui T_1 respectiv T_2 ce se opun laturilor c şi respectiv w.

Avem $2S_1 = ab\sin x$, $2S_2 = uv\sin y$ şi ţinând cont de teorema cosinusului, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$$4abuv\sin x\sin y \le a^2\left(2v^2 - 2uv\cos y\right) + b^2\left(2u^2 - 2uv\cos y\right) + 2uv\cos y\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2v^2 + b^2u^2\right) - 4abuv(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \ge 0 \Leftrightarrow 2(av - bu)^2 + 4abuv(1 - \cos(x+y)) \ge 0,$$

ceea ce este evident.

Obţinem egalitate pentru x = y şi $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$, adică cele două triunghiuri sunt asemenea.

8.31. Se ştie că $i_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ şi analoagele pentru i_b şi i_c.

Putem scrie $i_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$ şi cum $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq 1$ obținem $i_a^2 \leq p(p-a)$.

Analog $i_b^2 \leq p(p-b)$ şi $i_c^2 \leq p(p-c)$; astfel $i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 \leq p(3p-a-b-c) = p^2$.

Cum $\frac{1}{i_a^2} + \frac{1}{i_b^2} + \frac{1}{i_c^2} \geq \frac{9}{i_a^2 + i_b^2 + i_c^2} \geq \frac{9}{p^2}$.

Egalitate se obține pentru a = b = c.

8.32. Fie MNP triunghiul (T) cu latura MN paralelă cu A_1A_2; notăm $A_1A_6 \cap MN = \{B_1\}$, $A_2A_3 \cap MN = \{B_2\}$ (vezi Fig.12). Evident $S(T) \leq S(PB_1B_2)$. Considerăm un punct B_3 pe latura A_4A_5 şi avem $S(PB_1B_2) \leq S(B_1B_2B_3)$, deci $S(T) \leq S(B_1B_2B_3)$. Vom calcula valoarea maximă a ariei $S(B_1B_2B_3)$.

Notăm cu x distanța dintre B_1B_2 şi A_3A_6.

Obținem $B_1B_2 = \frac{2\left(R\sqrt{3} - x\right)}{\sqrt{3}}$ în funcție de x, unde R este latura hexagonului, deci

$S(B_1B_2B_3) = \frac{\left(R\sqrt{3} - x\right)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(R\sqrt{3} + 2x\right)}{2}$.

Maximul se atinge pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{4} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$ iar valoarea maximă a ariei triunghiului este $S(B_1B_2B_3)_{Max} = \frac{9R^2\sqrt{3}}{16}$.

Dar $S(H) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, deci $S(B_1B_2B_3)_{Max} = \frac{3}{8}S(H)$ şi $S(T) \leq \frac{3}{8}S(H)$.

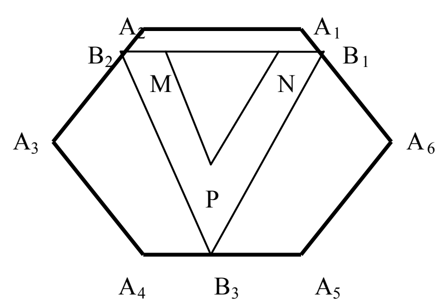

Fig.12

8.33. Fie M un punct oarecare pe circumferința cercului de centru O şi rază 1, diferit de punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dacă $|MA_1| + |MA_2| + \ldots + |MA_n| \geq n$, atunci demonstrația este încheiată.

Să presupunem că $|MA_1| + |MA_2| + \ldots + |MA_n| < n$ şi să considerăm punctul M′ diametral opus lui M. Atunci $|M'A_i| + |MA_i| > 2$, i = 1, 2, …, n, deoarece într-un triunghi suma a două laturi este mai mare decât a treia latură; $|M'A_i| + |MA_i| = 2$ numai dacă M′ coincide cu unul dintre punctele A_i, dar acesta nu va influența semnul de inegalitate strictă care se va obține sumând inegalitățile anterioare; deci $\sum_{i=1}^{n}|MA_i| + \sum_{i=1}^{n}|M'A_i| > 2n$; deoarece $\sum_{i=1}^{n}|MA_i| < n$, obținem că $\sum_{i=1}^{n}|M'A_i| > n$ şi deci M′ are proprietatea cerută.

8.34. Avem $\left|\sin(a_1x)\cdot\sin(a_2x)\cdot\ldots\cdot\sin(a_nx)+\cos(a_1x)\cdot\cos(a_2x)\cdot\ldots\cdot\cos(a_nx)\right|\le$
$\le\left|\sin(a_1x)\cdot\sin(a_2x)\cdot\ldots\cdot\sin(a_nx)\right|+\left|\cos(a_1x)\cdot\cos(a_2x)\cdot\ldots\cdot\cos(a_nx)\right|\le$
$\le\left|\sin(a_1x)\cdot\sin(a_2x)\right|+\left|\cos(a_1x)\cdot\cos(a_2x)\right|$.

Indiferent de semnele expresiilor din paranteză vom obține una din formele $\pm\cos(a_1\pm a_2)x$, pentru care avem $\pm\left|\cos(a_1\pm a_2)x\right|\le 1$.

8.35. Aplicând inegalitatea mediilor, obținem

$$(1)\quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}\le\frac{1}{4abc}\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\cdot\frac{p^3}{4\cdot 4SR}=\frac{4p^3}{27SR}=$$
$$=\frac{1}{27r}\cdot\frac{(2p)^2}{R}=\frac{1}{27r}\cdot\frac{(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)^2}{R}=$$
$$=\frac{4R}{27r}\cdot(\sin A+\sin B+\sin C)^2.$$

Aplicând inegalitatea lui Jensen pentru funcția $f(x)=\sin x$, care este concavă pe intervalul $(0,\pi)$deducem (2) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Din ultimele două inegalități (1) şi (2) obținem

$$(3)\quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}\le\frac{4R}{27r}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{R}{r}.$$

Pe de altă parte din exercițiul 8.1. (i) rezultă

$$(4)\quad (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc.$$

Din (3) şi (4) se deduce imediat că $R\ge 2r$.

8.36. (i) Fie M′ simetricul punctului M față de bisectoarea dusă din A. Se observă imediat că distanța de la M′ la c este egală cu d_b şi cea la b cu d_c. Fie de asemenea d'_a distanța de la M′ la a. Avem evident $d'_a+M'A\ge h_a$, h_a este înălțimea dusă din A, de unde deducem $ad'_a+aM'A\ge 2S$ (prin S am notat aria triunghiului).

Dar $M'A=MA\Rightarrow ad'_a+aMA\ge 2S$.

Pe de altă parte, $2S=cd_b+bd_c+ad'_a$, de unde deducem $aMA\ge cd_b+bd_c\Rightarrow MA\ge d_b\cdot\frac{c}{a}+d_c\cdot\frac{b}{a}$; analog $MB\ge d_a\cdot\frac{c}{b}+d_c\cdot\frac{a}{b}$ şi $MC\ge d_b\cdot\frac{a}{c}+d_a\cdot\frac{b}{c}$.

Adunăm şi obținem

$$MA+MB+MC\ge d_a\cdot\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+d_b\cdot\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+d_c\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right);$$

dar $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2,\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2,\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, de unde rezultă inegalitatea din enunț.

(ii). Avem $\frac{d_a}{MC}=\sin\widehat{MCB},\frac{d_b}{MC}=\sin\widehat{MCA}$ şi analoagele, deci

$$\frac{(d_a+d_b)(d_b+d_c)(d_a+d_c)}{MA\cdot MB\cdot MC}=$$
$$=\left(\sin\widehat{MCA}+\sin\widehat{MCB}\right)\left(\sin\widehat{MAC}+\sin\widehat{MAB}\right)\left(\sin\widehat{MBA}+\sin\widehat{MBC}\right)\le\frac{\left(\sum\sin\widehat{MCA}\right)^3}{27}.$$

Dar suma acestor unghiuri este 180°, deci maximul expresiei din dreapta se atinge atunci când toate unghiurile sunt egale cu $\frac{\pi}{6}$, adică $\frac{(d_a+d_b)(d_b+d_c)(d_a+d_c)}{MA\cdot MB\cdot MC}\le\frac{3^3}{27}=1$ iar egalitate avem pentru ABC triunghi echilateral şi M centrul său.

8.37. Construim paralelogramul AEBO şi notăm cu N mijlocul laturii AB. NC este mediană în triunghiurile ECO şi ABC de unde folosind teorema medianei deducem

$$(1)\quad 2\left(b^2+a^2\right)-c^2=2\left(OC^2+EC^2\right)-OE^2 .$$

Lungimea medianei care porneşte din O, a triunghiului OEC este mai mare decât 0, deci $2OE^2+2OC^2-EC^2\ge 0$.

Înlocuim pe EC în (1) şi obţinem $2OE^2+2OC^2-\left(b^2+a^2\right)+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}OE^2+OC^2\ge 0$ adică $\frac{3}{2}OE^2+3OC^2\ge a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2$.

Dar $OE^2=2OA^2+2OB^2-c^2$, pentru că OE este dublul medianei în triunghiul AOB.

Obţinem $3OA^2+3OB^2-\frac{3}{2}c^2+3OC^2\ge a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2$ sau

$$3\left(OA^2+OB^2+OC^2\right)\ge a^2+b^2+c^2 .$$

(ii) Relaţia din enunţ poate fi generalizată în felul următor: Fie $O, A_1,\ldots,A_n$ n+1 puncte în spaţiu. Atunci: $n\sum_{i=1}^{n}OA_i^2\ge\sum_{i<j}A_iA_j^2$.

Într-adevăr, $0\le\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right|=\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i^2}+\sum_{i\ne j}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=n\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i^2}-\frac{1}{2}\sum_{i\ne j}^{n}\left(\overrightarrow{A_iA_j}\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i^2}-\sum_{i<j}^{n}\left(\overrightarrow{A_iA_j}\right)^2=$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}OA_i^2-\sum_{i<j}A_iA_j^2 .$$

8.38. (i) Se studiază monotonia funcţiilor f, g : $[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sin x-x,\ g(x)=tgx-x .$$

(ii) Fie f : $[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sin x+tgx-3x$.

Avem $f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2x}-3=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2x}-3\ge$

$$\ge 3\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{\cos^2x}}-3=3-3=0 ,$$

deci f este crescătoare şi cum f(0) = 0, avem că pentru $0\le x<\frac{\pi}{2}$, f(x) ≥ f(0) = 0.

(iii) Funcţia f : $[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ este strict descrescătoare şi cum $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ deducem că $1>\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}>\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$, de unde deducem imediat inegalitatea din enunţ.

(iv) Se consideră funcția f : $[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$.

Cum $f'(x)=\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$, $f''(x)=-\sin x + x - \frac{x^3}{3!}$, $f^{(3)}(x)=-\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!}$, $f^{(4)}(x)=\sin x - x \le 0$ iar $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=f^{(4)}(0)=0$, deducem din aproape în aproape că f este descrescătoare, deci pentru x ≥ 0, f(x) ≤ f(0) = 0.

(v), (vi), (vii). Analog cu (iv).

8.39. Considerăm f_n : $[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)$.

Din $f_n' = f_{n-1}$ pentru n ≥ 1 și $f_n(0)=0$ pentru orice n ≥ 0, deducem din aproape în aproape că f_n este crescătoare, deci pentru n ≥ 0, $f_n(x)\ge f_n(0)=0$.

8.40. Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1^x+...a_n^x-n$.

Avem că f(x) ≥ f(0) = 0 pentru orice x ∈ ℝ, deci 0 este punct de minim pentru f. Conform unei teoreme a lui Fermat,

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln a_1+...+\ln a_n=0 \Leftrightarrow \ln(a_1...a_n)=0 \Leftrightarrow a_1...a_n=1.$$

8.41. (i) Notând $x=b+c-a, y=a+c-b, z=a+b-c$, inegalitatea se reduce la $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$, care este adevărată (vezi exercițiul 8.1).

Egalitate avem când triunghiul ABC este echilateral.

(ii). Avem $R=\frac{abc}{4S}$ și $r=\frac{S}{p}$ iar $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Inegalitatea de probat, R ≥ 2r este echivalentă cu $\frac{abc}{4S}\ge\frac{2S}{p}\Leftrightarrow 8S^2\le pabc \Leftrightarrow$

$$8p(p-a)(p-b)(p-c)\le pabc \Leftrightarrow (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\le abc,$$

ceea ce este adevărat conform (i).

(iii). Înlocuind $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ și analoagele pentru $\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}$ inegalitatea este echivalentă cu (i).

(iv). Înlocuind $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ și analoagele pentru $\cos B, \cos C$ inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\le a^2b^2c^2$, care se demonstrează ca și (i).

(v). Cum funcția f : $[0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ este concavă, conform inegalității lui Jensen avem că $\sin\frac{A+B+C}{3}\ge\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$; Avem egalitate în cazul când ABC este triunghi echilateral.

(vi). Rezultă din (v) ținând cont de faptul că

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3.$$

(vii). Avem că $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$ și aplicăm (iii).

(viii). Folosim (v) și faptul că $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

8.42. Conform inegalității mediilor, avem

$$\log_2 3 + \log_3 4 + ... + \log_n(n+1) > (n-1)\sqrt[n-1]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot ... \cdot \log_n(n+1)} =$$
$$= (n-1)\sqrt[n-1]{\log_2(n+1)}.$$

Este deci suficient să demonstrăm că

$$(n-1)\sqrt[n-1]{\log_2(n+1)} \geq n \Leftrightarrow \sqrt[n-1]{\log_2(n+1)} \geq \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow \log_2(n+1) \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Pentru n = 5, 6 inegalitatea se reduce la un calcul elementar.

Pentru n $\geq$ 7 avem n+1 $\geq$ 8, deci

$$\log_2(n+1) \geq 3 > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

8.43. Notăm $P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n}$; obținem $P_n^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot ... \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n}$ și deoarece pentru k > 1, avem $\frac{(2k-1)^2}{(2k-2) \cdot 2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - 1} > 1$, atunci

$$P_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pe de altă parte, deoarece pentru k > 1, avem

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2 - 1}{(2k)^2} < 1,$$

deci

$$P_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot ... \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

8.44. Deoarece suma din membrul stâng are pn termeni, putem scrie:

$$\frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + ... + \frac{1}{2pn} \geq \frac{(pn)^2}{(pn+1) + ... + (2pn)} = \frac{2pn}{3pn+1}$$

(avem egalitate pentru p = n = 1).

8.45. Conform inegalității mediilor avem:

$$\sqrt{C_n^{k-1} \cdot C_n^k} + \sqrt{C_n^k \cdot C_n^{k+1}} \leq \frac{C_n^{k-1} + C_n^k}{2} + \frac{C_n^k + C_n^{k+1}}{2} = \frac{C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k+1}}{2} = \frac{C_{n+2}^{k+1}}{2}.$$

Cum pentru n $\geq$ 2k, avem inegalitatea $\frac{C_{n+2}^{k+1}}{2} \leq C_{n+1}^{k+1}$, deducem inegalitatea cerută.

8.46. Rezultă din forma integrală a inegalităților lui Cebâşev alegând g : [a, b] $\to \mathbb{R}$, g(x) = x, pentru orice x $\in$ [a, b].

8.47. (i). Se face inducție matematică după n ;

(ii) rezultă imediat din (i) considerând sumele Riemann atașate diviziunii $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ cu $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ și punctele intermediare $\xi_k = x_k$, 0 $\leq$ k $\leq$ n.

8.48. Din enunț deducem că pentru s ∈ [a, b] avem $\dfrac{f(s)}{\alpha + \beta \cdot \int_a^s g(r)f(r)dr} \leq 1$;

înmulțind cu $\beta \cdot g(s)$ şi apoi integrând în raport cu s de la *a* la *t* obținem

$$\int_a^t \frac{\beta \cdot f(s) \cdot g(s)}{\alpha + \beta \cdot \int_a^s g(r)f(r)dr} ds \leq \int_a^t \beta \cdot g(s)ds \Rightarrow \ln\left(\alpha + \beta \cdot \int_a^s g(r)f(r)dr\right)\Bigg|_a^t \leq \beta \cdot \int_a^t g(s)ds \Rightarrow$$

$$\ln\left(\alpha + \beta \cdot \int_a^t f(s)g(s)ds\right) - \ln(\alpha) \leq \beta \cdot \int_a^t g(s)ds \Rightarrow \ln\left(\alpha + \beta \cdot \int_a^t f(s)g(s)ds\right) \leq \ln(\alpha) + \beta \cdot \int_a^t g(s)ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \cdot \int_a^t f(s)g(s)ds \leq \alpha \cdot e^{\beta \cdot \int_a^t g(s)ds}.$$

Cum $f(t) \leq \alpha + \beta \cdot \int_a^t f(s)g(s)ds$ deducem că $f(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta \cdot \int_a^t g(s)ds}$, pentru orice t∈[a, b].

8.49. ([19]). Dacă în forma integrală a inegalității lui Jensen luăm g(x) = x, atunci obținem $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

A doua inegalitate se justifică astfel: datorită convexității lui f avem

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b\right) \leq \frac{b-x}{b-a} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b),$$

iar de aici, prin integrare, deducem

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)}{b-a} \cdot \left(bx - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} \cdot \left(b^2 - \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\right) + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \left(a^2 + \frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2}\right) = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

La a doua inegalitate se poate ajunge şi astfel:

avem $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \Leftrightarrow f((a-b)t + b) \leq (f(a) - f(b))t + f(b)$ cu t ∈ [0, 1];

deci $\int_0^1 f((a-b)t + b)dt \leq \int_0^1 [(f(a) - f(b))t + f(b)]dt \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq (f(a) - f(b)) \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 + f(b) \cdot t\Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

8.50. ([19]). Pentru că f este bijecție crescătoare, avem f(0) = 0 şi f(α) = β.

$\int_0^a f(x)dx$ reprezintă aria regiunii aflate între graficul funcției, axa absciselor şi dreapta de ecuație x = a; $\int_0^b f^{-1}(x)dx$ reprezintă aria regiunii aflate între graficul funcției, axa ordonatelor şi dreapta de ecuație y = b. Suma acestor arii nu poate fi mai mică decât aria dreptunghiului format de axe cu dreptele de ecuații x = a şi y = b.

Trecând la demonstrație, să considerăm funcția $g(t) = bt - \int_0^t f(x)dx$ cu t ∈ [0, α]. Avem $g'(t) = b - f(t)$ şi astfel g are în $f^{-1}(b)$ un punct de maxim.

Avem $ab - \int_0^a f(x)dx = g(a) \leq g\left(f^{-1}(b)\right) = bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx =$

$$= b \cdot f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} x' \cdot f(x)dx = b \cdot f^{-1}(b) - x \cdot f(x)\Big|_0^{f^{-1}(b)} + \int_0^{f^{-1}(b)} x \cdot f'(x)dx =$$

$$= b \cdot f^{-1}(b) - f^{-1}(b) \cdot f\left(f^{-1}(b)\right) + \int_0^{f^{-1}(b)} f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x)dx =$$

$$= b \cdot f^{-1}(b) - b \cdot f^{-1}(b) + \int_0^{f\left(f^{-1}(b)\right)} f^{-1}(x)dx = \int_0^b f^{-1}(x)dx ,$$

de unde deducem inegalitatea de demonstrat.

8.51. (i). ([19]). Considerăm funcția

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot x^2 - \left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \cdot x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \text{ , x} \in \mathbb{R}$$

iar inegalitatea din enunț revine la a demonstra că $\Delta_f \geq 0$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\lambda) \leq 0$.
Avem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i^2 x^2 - \left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right) a_i b_i x + b_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i x - b_i \sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)\left(a_i x - b_i \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left(x - \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)\left(x - \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right).$$

Dacă intersecția intervalelor $\left[\frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{ab}{AB}}, \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}}\right]$, i $\in$ {1, 2, …, n} este nevidă, atunci pentru un λ comun tuturor acestor intervale avem $f(\lambda) \leq 0$. Această intersecție este nevidă dacă şi numai dacă $\frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{ab}{AB}} \leq \frac{b_j}{a_j}\sqrt{\frac{AB}{ab}} \Leftrightarrow \frac{a_j b_i}{a_i b_j} \leq \frac{AB}{ab}$ pentru orice i $\in$ {1, 2, …, n}, inegalitate care este adevărată conform condițiilor din enunț.

Ne-a mai rămas analiza cazului de egalitate.

Pentru a avea $\Delta_f = 0$ trebuie ca intersecția tuturor intervalelor în discuție să conțină un unic număr λ, iar pentru x = λ fiecare din numerele $\left(x - \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}}\right)\left(x - \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)$, i $\in$ {1, 2, …, n} să fie zero. Aceasta înseamnă că pentru orice i $\in$ {1, 2, …, n} trebuie să avem $\lambda = \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}}$ sau $\lambda = \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{ab}{AB}}$.

Fie I, J cu $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1,2,...,n\}$ cu proprietatea $\lambda = \frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}} = \frac{b_j}{a_j}\sqrt{\frac{ab}{AB}}$, pentru orice i $\in$ I şi j $\in$ J. Avem $\frac{b_i}{a_i}\sqrt{\frac{AB}{ab}} = \frac{b_j}{a_j}\sqrt{\frac{ab}{AB}} \Leftrightarrow \frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{A}{b} = \frac{b_j}{a_j} \cdot \frac{a}{B}$.

Dar $\frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{A}{b} \geq 1 \geq \frac{b_j}{a_j} \cdot \frac{a}{B}$ şi atunci $\frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{A}{b} = \frac{b_j}{a_j} \cdot \frac{a}{B} = 1$ adică $a_i = A, b_i = b, a_j = a, b_j = B$.

În aceste condiții, notând cu p numărul de elemente din I şi cu q numărul de elemente din J (evident, p+q=n), inegalitatea devenită egalitate capătă forma

$$\frac{\left(pA^2 + qa^2\right)\left(pb^2 + qB^2\right)}{(pAb + qaB)^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$4abAB\left(pA^2+qa^2\right)\left(pb^2+qB^2\right)=\left(AB+ab\right)^2\left(pAb+qaB\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$0=p^2\left[A^2b^2\left(AB+ab\right)^2-4ab^3A^3B\right]+q^2\left[a^2B^2\left(AB+ab\right)^2-4a^3bAB^3\right]+$$

$$+2pq\left[abAB\left(AB+ab\right)^2-2abA^3B^3-2a^3b^3AB\right]\Leftrightarrow 0=\left(pAb-qaB\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$pAb=qaB \Leftrightarrow pAb=\left(n-p\right)aB \Leftrightarrow p=\frac{naB}{Ab+aB}.$$

Deci egalitate în cazul acestei inegalități se obține în cazul în care numărul $p=\frac{naB}{\left(Ab+aB\right)}$ este natural, apoi pentru p indici i ∈ {1, 2, …, n} avem $a_i=A, b_i=b$ iar pentru ceilalți n- p indici i ∈ {1, 2, …, n} avem $a_i=a, b_i=B$.

Observație. Este uşor de constatat că o demonstrație asemănătoare avem pentru o inegalitate mai tare:

Fie $0<a<A$, $0<b<B$, $a_1, \dots, a_n \in [a, A]$, $b_1, \dots, b_n \in [b, B]$, $p_1, \dots, p_n > 0$ şi $n \geq 2$. Să se demonstreze că $\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i\right)^2} \leq \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2$;

(ii). Alegem $F(\lambda)=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\lambda^2-\left(\sqrt{\frac{RS}{rs}}+\sqrt{\frac{rs}{RS}}\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\cdot\lambda+\int_a^b g^2(x)dx=$

$$=\int_a^b\left(\lambda\cdot f(x)-\sqrt{\frac{RS}{rs}}\cdot g(x)\right)\left(\lambda\cdot f(x)-\sqrt{\frac{rs}{RS}}\cdot g(x)\right)dx.$$

Cum F are coeficient dominant pozitiv dacă arătăm că există λ ∈ ℝ astfel încât F(λ) ≥0 atunci $\Delta_F \geq 0$ şi inegalitatea este demonstrată.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că există λ∈ℝ astfel încât $\sqrt{\frac{rs}{RS}}\cdot g(x)\leq\lambda\cdot f(x)\leq\sqrt{\frac{RS}{rs}}\cdot g(x)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{rs}{RS}}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\leq\lambda\leq\sqrt{\frac{RS}{rs}}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}$, pentru orice x ∈ [a, b].

Un astfel de λ există dacă pentru orice x, y ∈ [a, b] avem

$$\sqrt{\frac{rs}{RS}}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\leq\sqrt{\frac{RS}{rs}}\cdot\frac{g(y)}{f(y)}\Leftrightarrow\frac{f(y)\cdot g(x)}{f(x)\cdot g(y)}\leq\frac{RS}{rs},$$

inegalitate adevărată conform condițiilor din enunț.

Capitolul 9 : Structuri algebrice finite

9.1. Fie $z_1, z_2 \in U_n \Rightarrow z_1^n = z_2^n = 1$. Deoarece $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = z_1^n \cdot z_2^{-n} = 1$ deducem că $U_n \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Analog, dacă $z_1, z_2 \in T \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$, atunci $|z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = 1$, adică $z_1 \cdot z_2^{-1} \in T$, deci $T \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

9.2. Asociativitatea înmulțirii rezultă imediat prin calcul (de exemplu : a(bc) = aa = =1 iar (ab)c = cc = 1, e.t.c.).

Elementul neutru este 1, iar $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$. Comutativitatea grupului K rezultă imediat din tabelă (ab = ba = c, e.t.c.).

9.3. Vom demonstra că în orice grup necomutativ G există cel puțin cinci elemente distincte.

Cum G este necomutativ, există x, y∈G astfel încât x ≠ y şi xy ≠ yx. Atunci 1, x, y, xy, yx sunt distincte două câte două.

Rezultă de aici că orice grup cu cel mult cinci elemente este comutativ.

9.4. Fie G o mulţime cu n elemente ($n\in\mathbb{N}^*$), $G = \{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$.

Dacă i, j∈ {0, 1, 2,…,n-1} definim $a_i\cdot a_j = a_r$, unde r este restul împărţirii lui i+j la n.

Această înmulţire este evident asociativă, comutativă, elementul neutru este a_0, iar simetricul lui a_i este a_{n-i}, pentru orice i∈{0, 1, …, n-1}.

9.5. Fie G = $\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : a,b,c\in Z_p\right\}$; se probează imediat că (G, ·) este grup necomutativ cu p^3 elemente.

Pentru A = $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ∈G deducem imediat prin calcul că

$$A^p = \begin{pmatrix}1 & pa & pb+pac\frac{p-1}{2}\\ 0 & 1 & pc\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

(deoarece a, b, c$\in\mathbb{Z}_p$).

9.6. Fie x∈G fixat. Definim f_x: G → G şi g_x : G→ G prin $f_x(t) = xt$, respectiv $g_x(t) = tx$. Din condiţiile din enunţ rezultă că f_x şi g_x sunt injecţii, şi deoarece G este finită, ele vor fi bijecţii. Atunci există $e_1, e_2\in G$ astfel încât $f_x(e_1) = x$ şi $g_x(e_2) = x \Rightarrow xe_1 = e_2x = x$.
Avem $xe_2 = (xe_1)e_2 = x(e_1e_2) = x$, deci $e_1e_2 = e_2$ şi $e_1x = e_1(e_2x) = (e_1e_2)x$, deci $e_1e_2 = e_1$. Am obţinut $e \overset{not}{=} e_1 = e_2$.

Vom demonstra că e este element neutru, adică ey = ye = y pentru orice y din G.

Într-adevăr putem scrie y = tx = xq cu t, q ∈G şi atunci ye = xte = tx = y iar ey = exq = xq = y.

Tot din faptul că f_x şi g_x sunt bijecţii rezultă că există x′ şi x″ în G astfel încât $f_x(x') = e$ şi $g_x(x'') = e \Rightarrow xx' = x''x = e \Rightarrow x' = ex' = x''xx' = x''e = x''$, deci $x^{-1} = x' = x''$ este inversul lui x. Cum x a fost ales oarecare în G, atunci orice element din G este inversabil, deci G este grup.

9.7. (i). Evident, deoarece G este un grup abelian, se verifică uşor că $(M_{m,n}(G), +)$ este grup abelian.

Deoarece orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(G)$ se identifică cu o funcţie f : {1, 2, …, m} × {1, 2, …, n} → G , f(i, j) = a_{ij} şi reciproc, deducem că numărul elementelor lui $M_{m,n}(G)$ este egal cu numărul acestor funcţii, adică cu r^{mn} (vezi Propoziţia 7.1.11, (i)).

(ii). Presupunem că ma ≠ nb şi să admitem că M(a,b) ≠ ∅.

Fie A= (a_{ij}) ∈M(a,b). Calculând suma elementelor matricei A în două moduri, şi anume :

$$\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{m} a = ma \text{ respectiv } \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{n} b = nb$$

rezultă că ma = nb, contradicţie. Deci M(a,b) = ∅.

(iii). Matricele din M(a, b) se obţin de maniera urmatoare : la intersecţia primelor m-1 linii şi n-1 coloane punem la întâmplare elemente din G. Fixăm o astfel de matrice. Primele n-1 elemente ale ultimei linii şi primele m-1 ale ultimei coloane sunt unic determinate. Din condiţia ma = nb este unic determinat şi elementul de pe poziţia mn.

Avem deci $r^{(m-1)(n-1)}$ elemente în M(a, b).

9.8. Fie $x\in G$ şi $A' = \{xa^{-1} : a\in A\}\subseteq G$. Evident $|A'| = |A|$. Dacă $A'\cap B = \emptyset$, atunci $|A'\cup B| = |A'| + |B| = |A| + |B| > |G|$, absurd, deoarece $A' \cup B \subseteq G$. Deci există $b\in A'\cap B$ astfel încât $b = xa^{-1} \Rightarrow x = ab\in AB$, adică $G \subseteq AB$ şi cum $AB \subseteq G \Rightarrow G = AB$.

9.9. Faptul că G este comutativ se probează imediat.

Să presupunem că G este finit şi fie H subgrupul lui G cu proprietatea că este cel mai mare având ordinul o putere a lui 2 (deci $|H| = 2^n$ iar n este cel mai mare număr natural cu această proprietate).

Deoarece pentru orice $x\in G$, $x \neq 1$, $x^2 = 1 \Rightarrow \{1, x\} \leq G$, deci $n \geq 1$.

Intenţionăm să demonstrăm că G = H şi atunci va rezulta că |G| este o putere naturală a lui 2.

Să presupunem prin absurd că există $x\in G \setminus H$. Atunci $H' = H \cup (xH) \leq G$ (se probează imediat) şi cum $H\cap(xH) = \emptyset$ deducem că $|H'| = |H| + |xH| =|H|+|H| = 2|H| = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$, contrazicând astfel maximalitatea lui n. Rămâne deci că G = H, adică $|G| = 2^n$.

9.10. Fie ord G = n şi $S = \{ (a_1,a_2,\ldots,a_p) : a_i\in G,\ 1 \leq i \leq p,\ a_1a_2\ldots a_p = 1\}$. Atunci S are n^{p-1} elemente (într-adevăr, dacă $a_1,a_2,\ldots a_{p-1}\in G$ arbitrare $\Rightarrow a_p = (a_1a_2\ldots a_{p-1})^{-1}$, deci cum $a_1, \ldots, a_p\in G$ şi G are n elemente, rezultă că S are n^{p-1} elemente) .

Definim relaţia de echivalenţă ~ pe S astfel $x\sim y \Leftrightarrow$ x este o permutare ciclică a lui y. Atunci clasa de echivalenţă a lui $x = (a_1, \ldots, a_p)$ conţine exact un singur element dacă toţi a_i sunt egali, şi exact p elemente in caz contrar, deoarece p este prim.

Într-adevăr, fie $x = (a_1, \ldots, a_p)$ şi i, j primul şi ultimul rang pentru care $a_i = a_j$ şi $a_i = a_{i_1} = \ldots = a_{i_k} = a_j$ cu $i < i_1 < \ldots < i_k < j$, $k \geq 0$ (dacă k = 0, $i_1 = j$).

Ca să obţinem prin permutări circulare pe locurile i, $i_1, \ldots, i_k$, j aceleaşi elemente ar trebui să avem: $p + i - j = j - i_k = \ldots = i_1 - i = n \geq k \Rightarrow j = (k+1)n + i \Rightarrow p = n + j - i = n + (k+1)n + i - i = n(k + 2)$. Dar p este prim atunci n = 1 şi p = k+2 $\Rightarrow i_1 = i + 1$, $i_2 = i + 2, \ldots, j = i + k + 1 = p - 1 + i \Rightarrow a_{i_1} = \ldots = a_{i_k}$ şi în acest caz rezultă că toate cele p permutări circulare sunt distincte.

Fie r numărul claselor cu un element şi t numărul claselor cu p elemente.

Atunci : $r + tp = n^{p-1}$ şi cum $p \mid n$ rezultă $p \mid r$. În plus r este diferit de zero pentru că $(1, 1, \ldots, 1) \in S$, deci r este numărul soluţiilor ecuaţiei $x^p = 1$ în G.

9.11. Fie $a\in G \setminus H$ şi funcţia $f_a : H \to (G \setminus H)$, $f_a(x) = ax$. Evident f_a este corect definită şi injectivă; deoarece $G \setminus H$ are un număr finit de elemente, rezultă că şi H are un număr finit de elemente. Cum $G = H \cup (G \setminus H)$ deducem că G este finit.

9.12. Fie G_1 un grup abelian finit şi $p = \prod_{x\in G_1} x$. Atunci :

(1) $$p^2 = \left(\prod_{x\in G_1} x\right)^2 = \prod_{x\in G_1} x \cdot \prod_{x\in G_1} x = \prod_{x\in G_1} x \cdot \prod_{x\in G_1} x^{-1} = \prod_{x\in G_1} (xx^{-1}) = 1 .$$

Fie $H \leq G$ cu proprietatea (A), $p = \prod_{x\in G} x$, $\alpha = \prod_{x\in H} x$ şi $\beta = \prod_{x\in G\setminus H} x$.

Cum $\alpha\cdot\beta = p$ şi $\alpha = \beta$, rezultă că $\alpha^2 = p$. Considerând în (1) pe H în loc de G_1, rezultă că $\alpha^2 = 1$, deci p = 1.

Fie $H_1 \leq G$, $H_1 \neq G$, $\alpha_1 = \prod_{x \in H_1} x$ şi $\beta_1 = \prod_{x \in G \setminus H_1} x$. Cum $\alpha_1\beta_1 = p = 1$, rezultă că $\beta_1 = \alpha_1^{-1}$. Dar, din (1), $\alpha_1^2 = 1$, deci $\alpha_1^{-1} = \alpha_1$. Obținem $\beta_1 = \alpha_1$, deci H_1 are proprietatea (A).

9.13. (i). Dacă G şi H sunt grupuri finite, atunci în mod evident $s(G\times H) \geq s(G)\cdot s(H)$ (căci $G' \leq G$, $H' \leq H \Rightarrow G' \times H' \leq G\times H$), astfel $s(G^n) \leq (s(G))^n$.

Pentru grupul lui Klein K avem $|K| = 4$, $s(K) = 5$ astfel că $\frac{|K^n|}{s(K^n)} \leq \left(\frac{|K|}{s(K)}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Fie acum $a\in\mathbb{R}$, $a>0$.

Deoarece $\left(\frac{4}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, există $n_a \in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\left(\frac{4}{5}\right)^{n_a} < a$.

Alegând $G = K^{n_a}$ avem $\frac{|K|}{s(K)} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n_a} < a$.

(ii). Fie $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Există p_a prim astfel încât $\frac{p_a}{2} > a.$ Alegând grupul $G = (\mathbb{Z}_{p_a},+)$ avem $\frac{|Z_{p_a}|}{s(Z_{p_a})} = \frac{p_a}{2} > a.$

9.14. Conform exercițiului 9.1. $U_n \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$.

Avem $U_n = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, unde $z_k = \cos(2k\pi/n) + i\cdot\sin(2k\pi/n)$, $k=0,1,\ldots, n-1$, de unde rezultă că $|U_n| = n$, şi cum $z_k = z_1^k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ deducem că $U_n= \langle z_1 \rangle$ adică U_n este grup ciclic.

Observație. U_n va avea $\varphi(n)$ generatori şi anume elementele de forma z_k cu $(k, n)= 1$, $1\leq k \leq n$.

Un generator al lui U_n poartă numele de *rădăcină primitivă a unității de ordin n.*

9.15. Dacă $H, K\in L(\mathbb{Z},+)$ atunci $H \wedge K = H \cap K$.

Trebuie să demonstrăm că $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$. Notăm cu $t = [m, n]$, şi atunci $t = mm_1 = nn_1$. Fie $x\in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$; atunci $x = mx_1 = nx_2$, cu $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, deci $m \mid x$ şi $n \mid x$.

Cum $t = [m, n]$ rezultă că $t \mid x$, adică $x\in t\mathbb{Z}$. Invers, fie $x\in t\mathbb{Z}$; atunci $x = tx_1$, cu $x_1\in\mathbb{Z}$, deci $x = mm_1x_1 = nn_1x_1$, ceea ce arată că $x\in m\mathbb{Z}$ şi $x\in n\mathbb{Z}$.

Analog se demonstrează că $H \vee K = (m, n)\mathbb{Z}$ (este de fapt subgrupul generat de $H\cup K$).

Distributivitatea lui $(L(\mathbb{Z}, +), \subseteq)$ rezultă din faptul că $(\mathbb{N}, \mid)$ este o latice distributivă, folosind cele demonstrate anterior.

9.16. Fie $f, g\in S_X(Y)$, adică $f(Y) = g(Y) = Y$. Atunci $(f\circ g^{-1})(Y) = f(g^{-1}(Y)) = f(Y)= Y$, adică $f\circ g^{-1}\in S_X(Y)$, deci $S_X(Y) \leq Izom(X)$.

9.17. ([45]) Fie (C) cercul circumscris poligonului P_n de centru O, r raza sa iar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vârfurile poligonului; avem în mod evident $d(A_i, O) = r$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi $d(A, O) < r$ pentru orice $A\in \overline{P}_n - \{A_1,\ldots,A_n\}$.

Pentru o izometrie $\varphi\in D_n$ avem: $\varphi(\overline{P}_n) = \overline{P}_n$ şi $d(\varphi(A_i), \varphi(O)) = r$, $i = 1, 2, \ldots, n$ iar $d(\varphi(A), \varphi(O)) < r$, pentru orice $A\in \overline{P}_n - \{A_1, \ldots, A_n\}$.

Rezultă imediat că $\varphi(O) = O$ şi $\varphi(A_i)\in\{A_1, \ldots, A_n\}$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$.

De asemenea, se deduce imediat că ρ şi ε din enunț sunt elemente ale D_n.

Obținem astfel 2n elemente distincte ale lui D_n: $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon,\ldots,\rho^{n-1}\varepsilon$.

Să demonstrăm acum că D_n are cel mult 2n elemente (de unde va rezulta concluzia exercițiului).

Pentru aceasta, să observăm că pentru $\varphi\in D_n$, cum $\varphi(A_i)\in\{A_1, \ldots, A_n\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pentru alegerea lui $\varphi(A_1)$ avem cel mult n posibilități şi anume $\varphi(A_1) = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $\varphi(A_1)$ este definit, atunci $\varphi(A_2)$ are numai două posibilități şi anume vârfurile adiacente ale lui A_1.

De asemenea, izometria φ este unic determinată dacă definim $\varphi(A_1)$ şi $\varphi(A_2)$ (deoarece $\varphi(O) = O$), deci $|D_n| \leq 2n$ şi cum D_n are deja 2n elemente distincte, deducem că: $D_n = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon, \ldots, \rho^{n-1}\varepsilon\}$.

9.18. Se ştie că orice permutare se scrie ca un produs de transpoziții.

Totul rezultă acum din faptul că orice traspoziție (i, j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i, j) = \tau_{j-1}\ldots\tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}\ldots\tau_{j-1}$.

9.19. Totul rezultă din faptul că orice traspoziție (i, j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i, j) = \tau_i\tau_j\tau_i$.

9.20. Totul rezultă din faptul că orice traspoziție (i, j) cu $1<i<j$ se scrie sub forma: $(i, j) = (i, k)(j, k)(i, k)$.

9.21. Ținând cont de exercițiul 9.20. este suficient să demonstrăm că orice transpoziție $\tau_i = (i, i+1)$, $i \geq 2$ face parte din grupul generat de τ şi σ.

Acest lucru rezultă din relațiile : $\sigma^{-1}\tau\sigma = (1, n)$, $\sigma^{-2}\tau\sigma^2 = \sigma^{-1}(1, n)\sigma = (n-1, n) = \tau_{n-1}$, $\sigma^{-3}\tau\sigma^3 = \sigma^{-1}\tau_{n-1}\sigma = (n-2, n-1) = \tau_{n-2},\ldots, \sigma^{-(n-1)}\tau\sigma^{n-1} = \sigma^{-1}\tau_3\sigma = (2, 3) = \tau_2$, ținând cont că $\sigma^{-1} = (n, 1, 2, \ldots, n-1)$.

9.22. Se ştie că orice permutare pară este produsul unui număr par de transpoziții.

Dacă două transpoziții vecine (i, j), (k, t) au proprietatea că $\{i, j\}\cap\{k, t\}=\varnothing$, atunci $(i, j)(k, t) = (i, k, j)(i, k, t)$, iar dacă $\{i, j\}\cap\{k, t\} \neq \varnothing$ (să presupunem că $i = k$) avem $(i, j)(i, t) = (i, t, j)$.

9.23. Conform execițiului 9.19. orice permutare pară este un produs par de transpoziții de forma $(1, i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Deoarece $(1, i)(1, j) = (1, j, i)$, afirmația din enunț rezultă din egalitatea $(1, j, i) = (1, 2, i)(1, 2, i)(1, 2, j)(1, 2, i)$.

9.24. Dacă $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ este un ciclu de lungime r ($r \leq n$), atunci $\alpha^r = e$ deoarece, de exemplu $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha^2(i_1) = i_3, \ldots, \alpha^r(i_1) = i_1$, ş.a.m.d. iar din calcule se vede că r este cel mai mic număr natural cu proprietatea $\alpha^r = e$.

9.25. Fie $\sigma\in S_n$. Dacă σ este pară, considerăm

$$\sigma_{n+1,n+2} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix},$$

care este evident în A_{n+2}.

Dacă σ este impară, considerăm

$$\sigma_{n+2,n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) & n+2 & n+1 \end{pmatrix},$$

care face parte tot din A_{n+2}.

Să notăm prin $f : S_n \to A_{n+2}$ asocierea de mai sus şi să demonstrăm că f este morfism de grupuri (în mod evident f este aplicație injectivă).

Fie deci $\sigma, \tau \in S_n$; dacă σ, τ sunt pare, atunci şi $\sigma \circ \tau$ este pară, astfel că:

$$f(\sigma)=\begin{pmatrix} 1 & ... & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix} \text{ şi } f(\tau)=\begin{pmatrix} 1 & ... & n & n+1 & n+2 \\ \tau(1) & ... & \tau(n) & n+1 & n+2 \end{pmatrix},$$

deci $f(\sigma) \circ f(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & ... & n & n+1 & n+2 \\ \sigma(\tau(1)) & ... & \sigma(\tau(n)) & n+1 & n+2 \end{pmatrix} = f(\sigma \circ \tau)$.

Analog se procedează în celelalte cazuri ținând cont de faptul că prin compunerea a două permutări de aceeaşi paritate obținem o permutare pară iar prin compunerea a două permutări de parități diferite obținem o permutare impară. Deoarece f este morfism injectiv de grupuri deducem că S_n poate fi privit ca subgrup al lui A_{n+2}.

9.26. Vom demonstra că dacă $\sigma \in Z(A_n)$ ($n \geq 4$), atunci $\sigma = e$.

Să presupunem prin absurd că $\sigma \neq e$, atunci există $i \in \{1,2, \ldots,n\}$ astfel încât $\sigma(i) \neq i$ şi fie $j = \sigma(i) \neq i$.

Cum $n \geq 4$, există $k, t \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Dacă notăm $\sigma_{jkt} = (j, k, t)$, atunci $\sigma_{jkt} \in A_n$ şi astfel ar trebui ca $\sigma\sigma_{jkt} = \sigma_{jkt}\sigma$.

Scriind că în i este adevărată ultima egalitate, deducem că $j = k$ – absurd şi astfel deducem că $Z(A_n) = \{e\}$.

9.27. Vom demonstra că dacă $\sigma \in Z(S_n)$ ($n \geq 3$), atunci $\sigma = e$.

Să presupunem prin absurd că $\sigma \neq e$, atunci există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\sigma(i) \neq i$ şi fie $j = \sigma(i) \neq i$. Cum $n \geq 3$, există $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$. Dacă notăm $\sigma_{jk} = (j, k)$, atunci $\sigma_{jk}\sigma \neq \sigma\sigma_{jk}$ deoarece $(\sigma_{jk}\sigma)(i) = k$ iar $(\sigma\sigma_{jk})(i) = j$. Acest lucru este contradictoriu, rezultând astfel că $Z(S_n) = \{e\}$.

9.28. Permutarea $(1, 2, \ldots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \end{pmatrix}$ are n-1 inversiuni, deci este pară pentru n impar şi impară pentru n par. Cum pentru orice $x \in S_n$, x^2 este pară, rezultă că pentru n par ecuația respectivă nu are soluție.

Fie acum $n = 2k+1$ cu $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $k = 1, 2, 3$ se verifică prin calcul că soluțiile căutate sunt respectiv :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

În cazul general, vom demonstra că singura soluție a ecuației :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2k & 2k+1 \\ 2 & 3 & ... & 2k+1 & 1 \end{pmatrix} \text{ este permutarea}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k-1 & k & k+1 & ... & 2k+1 \\ k+2 & k+3 & ... & 2k & 2k+1 & 1 & ... & k+1 \end{pmatrix}$$

Fie $x(1) = a$. Dacă $a = 1$, atunci $x^2(1) = x(1) = 1 \neq 2$ – absurd.

De asemenea, din $x(1) = 2 \Rightarrow 2 = x(2)$ – absurd, deci $a > 2$.

Dacă $a > 2$, atunci $x(2) = x(x^2(1)) = x^2(x(1)) = x^2(a) = a+1$ şi prin inducție după j şi t se arată că $x(j) = a+j-1$ pentru $j = 1, 2, \ldots, 2k+2-a$ şi $x(2k + 2 - a + t) = t$ pentru $t = 1, 2, \ldots, a-1$.

Deci $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2k+2-a & 2k+3-a & ... & 2k+1 \\ a & a+1 & ... & 2k+1 & 1 & ... & a-1 \end{pmatrix}$.

Deoarece $x(a) = x^2(1) = 2 \Rightarrow 2k+4-a = a \Rightarrow a = k+2$, de unde rezultă forma lui x pe care am amintit-o mai sus.

9.29. ([34]) (i). Fie $\sigma = (i_o,\sigma(i_o), \ldots,\sigma^{m-1}(i_o))$ un ciclu de lungime m, cu $p \nmid m$.

Se observă imediat că $\sigma^p = (i_o, \sigma^p(i_o), \sigma^{2p}(i_o), \ldots, \sigma^{(m-1)p}(i_o))$.

Deoarece (m, p) = 1, resturile pe care le dau la împărțirea cu m numerele 0, p, 2p, … , (m-1)p sunt toate numerele 0, 1, 2, …, m-1 (eventual într-o altă ordine). Deducem că σ^p este un ciclu de lungime m. Cum $\sigma^m = (1) = e$ deducem că $\{i_o, \sigma(i_o), \ldots, \sigma^{m-1}(i_o)\} = \{i_o, \sigma^p(i_o), \ldots, \sigma^{p(m-1)}(i_o)\}$, adică σ şi σ^p au aceeaşi orbită.

(ii). Fie m = kp iar $\sigma = (i_o, \sigma(i_o), \ldots, \sigma^{m-1}(i_o))$ un ciclu de lungime m.

Ținând cont de egalitățile $i_o = \sigma^{kp}(i_o)$, $\sigma(i_o) = \sigma^{kp+1}(i_o)$, …, $\sigma^{p-1}(i_o) = \sigma^{kp+p-1}(i_o)$, deducem că $\sigma^p = (i_o, \sigma^p(i_o), \ldots, \sigma^{(k-1)p}(i_o))\cdot(\sigma(i_o), \sigma^{1+p}(i_o), \ldots, \sigma^{1+(k-1)p}(i_o))\ldots(\sigma^{p-1}(i_o), \ldots, \sigma^{p-1+p}(i_o), \ldots, \sigma^{p-1+(k-1)p}(i_o))$, adică σ^p este un produs de p ciclii disjuncți, fiecare având lungimea k = =m/p.

9.30. ([34]) (i). Fie σ un ciclu de lungime m, unde (m, p) = 1.

Atunci există $q \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ astfel încât $pq \equiv 1 \pmod m$. Dacă notăm $\tau = \sigma^q$, atunci din $pq \equiv 1 \pmod m$ deducem că (q, m) = 1 şi atunci, conform exercițiului precedent va rezulta că $\sigma^p = \tau$ este un ciclu de lungime m şi în plus $\tau^p = \sigma^{pq} = \sigma$ (deoarece $\sigma^m = e$).

(ii). Fie ciclii disjuncți de lungime k:

$\sigma_1 = (i_0^1, i_1^1, \ldots, i_{k-1}^1)$

…………………

$\sigma_p = (i_0^p, i_1^p, \ldots, i_{k-1}^p)$

Considerând atunci următorul ciclu de lungime kp:

$\tau = (i_0^1, \ldots, i_0^p, i_1^1, \ldots, i_1^p, \ldots, i_{k-1}^1, \ldots, i_{k-1}^p)$ se constată imediat că $\tau = \sigma_1\cdot\sigma_2\ldots\sigma_p$.

9.31. ([34]) "⇒". Să presupunem că ecuația $x^p = \sigma$ are o soluție $x \in S_n$. Considerăm descompunerea lui x în ciclii disjuncți $x = x_1x_2\ldots x_t$.

Să presupunem că dintre aceştia $x_1, x_2, \ldots, x_i$ au lungimi divizibile cu p^2, $x_{i+1}, \ldots, x_j$ au lungimi divizibile cu p dar nu cu p^2, iar $x_{j+1}, \ldots, x_t$ au lungimi nedivizibile cu p.

Astfel, (1) $\sigma = x^p = (x_1^p \ldots x_i^p)(x_{i+1}^p \ldots x_j^p)(x_{j+1}^p \ldots x_t^p)$.

Conform exercițiului anterior, puterile $x_{j+1}^p, \ldots, x_t^p$ sunt ciclii de lungimi egale respectiv cu lungimile ciclilor $x_{j+1}, \ldots x_t$, deci nedivizibile cu p. De asemenea orbitele lor sunt respectiv egale, ceea ce ne arată că $x_{j+1}^p, \ldots, x_t^p$ sunt ciclii disjuncți.

Tot din acelaşi exercițiu deducem că fiecare din puterile $x_{i+1}^p, \ldots, x_j^p$ este un produs de p-ciclii disjuncți de lungimi care nu se mai divid cu p şi aceşti ciclii rămân disjuncți în totalitatea lor (au orbitele incluse în orbitele ciclilor $x_{i+1}, \ldots, x_j$).

De asemenea, fiecare din puterile $x_1^p, \ldots, x_i^p$ este un produs de p-cicli disjuncți de lungimi divizibile cu p şi în totalitatea lor ciclii care apar rămân disjuncți.

Să presupunem că descompunerile acestor puteri sunt :

$$x_1^p = x_{11}\cdot x_{12}\ldots x_{1p}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_i^p = x_{i1}\cdot x_{i2}\ldots x_{ip}$$

Ținând cont de cele de mai înainte, deducem că ciclii care au lungimi divizibile cu p sunt $x_{11}, \ldots, x_{1p}, x_{21}, \ldots, x_{2p}, \ldots, x_{i1}, \ldots, x_{ip}$ şi numai aceştia; câte p dintre aceştia (şi anume exact în ordinea în care sunt scrişi mai înainte) au aceea şi lungime.

Deducem astfel că dacă fixăm o lungime divizibilă cu p de la ciclii din descompunerea lui σ, să zicem m_s, numărul α_s al ciclilor de lungime m_s este un multiplu de p (s = 1, 2, …, k).

"⇐". Să presupunem că toate numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt divizibile cu p. Atunci cei α_1 ciclii de lungime m_1 (m_1 divizibil cu p) pot fi împărțiți în grupe de câte p ciclii şi conform ex. anterior produsul ciclilor dintr-o asemenea grupă este puterea p a unui alt ciclu (a cărui orbită este reuniunea orbitelor celor p ciclii). Deducem astfel că produsul celor α_1 ciclii de lungime m_1 este un produs de puteri de p-ciclii disjuncți. Analog pentru produsul celor α_2 ciclii de lungime m_2, ş.a,m.d. până la produsul celor α_k ciclii de lungime m_k (m_1, …, m_k fiind numerele divizibile cu p).

Considerăm acum şi ciclii de lungime m_{k+1}, …, m_t (lungimi nedivizibile prin p), tot conform exerciţiului precedent, fiecare asemenea ciclu este puterea p a unui ciclu având aceeaşi orbită.

Astfel, dacă notăm cu x produsul tuturor acestor noi ciclii puşi în evidenţă obţinem că $\sigma = x^p$, deci ecuaţia considerată are soluţie în grupul S_n.

Să rezolvăm acum aplicaţiile din enunţ.

Pentru prima aplicaţie, să notăm prin σ permutarea din dreapta.

Avem următoarea descompunere a lui σ în produs de ciclii disjuncţi:

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(10\ 19)(4\ 8\ 11\ 13)(14\ 15\ 17\ 18)(9\ 12\ 16).$$

În cazul acestui exerciţiu avem p = 2 iar numărul ciclilor de lungimi divizibile prin 2 sunt cei de lungime 2 şi 4. Avem $\alpha_1=4$, $\alpha_2=2$ şi cum ambele numere sunt divizibile prin 2 deducem că ecuaţia considerată are soluţie în S_{19}.

Pentru a doua ecuaţie, notând tot cu σ permutarea din partea dreaptă avem că $\sigma = (1\ 3\ 5)(4\ 9\ 10)(2\ 6\ 7\ 8)$. Avem p = 3 iar ciclii de lungime 3 sunt în număr de $\alpha_1=2$ care nefiind multiplu de 3, deducem conform celor stabilite mai înainte că a doua ecuaţie nu are soluţie în S_{10}.

9.32. Oricum am considera o permutare $\sigma\in S_n$, $\sigma \neq e$, aceasta nu poate avea în descompunerea sa ciclii de lungime divizibilă cu p (căci p > n).

Deci numărul ciclilor de lungime divizibilă cu p este 0 şi cum 0 este multiplu de p, totul rezultă acum din exerciţiul precedent.

9.33. ([34]) "$\Rightarrow$". Fie $x\in S_n$, $x \neq e$, o soluţie a ecuaţiei $x^p = e$ şi fie $x = x_1x_2\dots x_t$ descompunerea sa în ciclii disjuncţi.

Vom demonstra că $x_1, \dots, x_t$ au, fiecare dintre ei, lungimea p.

Deoarece $x_1, \dots, x_t$ sunt disjuncţi, rezultă că aceşti ciclii, ca şi puterile lor comută. Atunci egalitatea $x^p = e$ se scrie $x_1^p x_2^p \dots x_t^p = e$.

Să demonstrăm că de aici deducem $x_1^p = x_2^p = \dots = x_t^p = e$.

Într-adevăr, dacă prin absurd există $i\in\{1,2,\dots t\}$ astfel încât $x_i^p \neq e$, atunci există $a\in\{1,2,\dots,t\}$ cu $x_i^p(a) \neq a$ şi atunci a aparţine orbitei ciclului x_i.

Deoarece astfel a nu va face parte din orbitele ciclilor disjuncţi $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_t$ deducem că : $x_1^p(a) = \dots = x_{i-1}^p(a) = x_{i+1}^p(a) = \dots = x_t^p(a) = a$.

Deoarece $a = e(a) = (x_1^p x_2^p \dots x_t^p)(a) = x_i^p(a) \neq a$ rezultă contradicţia $a \neq a$.

De asemenea, din cele de mai înainte deducem că ordinele permutărilor $x_1, x_2, \dots, x_t$ în grupul S_n sunt divizori ai lui p şi cum p este prim deducem că $o(x_1) = \dots = o(x_t) = p$.

Cum ordinul unui ciclu este egal cu lungimea ciclului respectiv, deducem că $x_1, \dots, x_t$ sunt ciclii de lungime p.

"$\Leftarrow$". Această implicaţie este evidentă deoarece orice ciclu de lungime p are ordinul p în grupul S_n, deci este o soluţie a ecuaţiei $x^p = e$.

9.34. Facem inducţie după n.

Dacă n = 1, atunci G este ciclic şi cum orice subgrup al unui grup ciclic este ciclic, totul este clar.

Presupunem acum că $G = \langle\{x_1, x_2, \dots, x_n\}\rangle$ şi $H \leq G$.

Alegem $y = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ astfel încât m_1 ia cea mai mică valoare nenulă pozitivă (dacă m_1 este negativ schimbăm rolul lui y cu y^{-1}).

Dacă x_1 nu apare la un exponent nenul în orice element al lui H, atunci $\langle\{x_2, x_3, \dots, x_n\}\rangle$ conţine pe H şi totul rezultă din ipoteza de inducţie.

Astfel, pentru orice $z = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ din H putem alege q, $r \in \mathbb{Z}$ cu $0 \le r < m_1$ şi $l_1 = qm_1 + r$. Puterea la care apare x_1 în $zy^{-q} \in H$ este r şi ţinând cont de alegerea lui m_1 deducem că $r = 0$.

Deci $H = \langle y, K \rangle$, unde $K = H \cap \langle \{x_2, x_3, .., x_n\} \rangle$ şi conform ipotezei de inducţie K este generat de o mulţime de cel mult n-1 elemente şi acum totul este clar.

9.35. Din $|Z(G)| > \frac{1}{2}|G| \Rightarrow |G| < 2|Z(G)|$. Însă conform teoremei lui Lagrange $|Z(G)|$ divide $|G|$ (căci $Z(G) \le G$), adică $|G| = n\cdot |Z(G)|$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 1$.

Deci $n\cdot|Z(G)| < 2\cdot|Z(G)| \Rightarrow n < 2$, adică $n = 1 \Rightarrow |G| = |Z(G)| \Rightarrow$ G este comutativ.

9.36. Fie $H = \{x \in G : x^2 = 1\}$. Cum G este comutativ, dacă $x, y \in H \Rightarrow x^2 = y^2 = 1 \Rightarrow (xy^{-1})^2 = x^2y^{-2} = 1$, adică $xy^{-1} \in H$, deci $H \le G$.

Conform exerciţiului anterior, punând în locul lui Z(G) pe H, obţinem că $|H| = |G|$, deci $H = G$, şi de aici $x^2 = 1$, pentru orice $x \in G$.

9.37. Să presupunem că mulţimea $T = \{a_1, \dots a_r\}$ a elementelor de ordin 2 are mai mult de n elemente, deci $r > n$ (atunci $r \ge n+1$). Pentru $a_i, a_j \in T$, $i \ne j$ rezultă că $a_ia_j \in G \setminus T$. Într-adevăr, dacă $a_ia_j \in T$ atunci $H = \{ e, a_i, a_j, a_ia_j\}$ ar fi un subgrup în G, deci $4 \mid 2n$ (conform teoremei lui Lagrange) adică n este par , ceea ce este absurd.

În plus, $a_ia_j \ne 1$ pentru orice $i \ne j$. Din cele demonstrate rezultă că elementele a_1a_2, a_1a_3, …, a_1a_r se află în $G \setminus (T \cup \{1\})$ al cărui cardinal este $2n - r - 1 < 2n - n - 1 = n-1$, adică există $i \ne j$ astfel încât $a_1a_i = a_1a_j \Rightarrow a_i = a_j$ – absurd. Deci $r \le n$.

Observaţie. Maximul se poate atinge efectiv, de exemplu în cazul grupului diedral $\mathbf{D_n}$ cu 2n elemente.

9.38. Fie $o(x) = k$ şi $H = \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\} \le G$. Cum $x^n \in H$, atunci $o(x^n)$ divide $|H| = k = o(x)$.

9.39. Fie ord G = n şi d = c.m.m.d.c al ordinelor elementelor din G diferite de 1. Evident $d \mid n$. Fie $d = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Atunci există elementele $x_1, x_2, \dots, x_r$ astfel încât $p_i^{\alpha_i} \mid o(x_i) \Leftrightarrow o(x_i) = p_i^{\alpha_i} \cdot t_i$. Se verifică uşor că $x = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_r^{t_r}$ are ordinul d.

9.40. Fie $k = o(x^m)$ iar $d = (m, n)$. Putem scrie $m = dm'$, $n = dn'$ cu $m', n' \in \mathbb{N}$ şi $(m', n') = 1$ iar $mm' = nn' = dm'n'$.

Cum $n = o(x)$, avem $(x^m)^{m'} = (x^n)^{n'} = 1$, adică $o(x^m) = k \mid n'$.

Pe de altă parte, $x^{mk} = (x^m)^k = 1 \Rightarrow n = o(x) \mid mk \Rightarrow n' \mid m'k$ şi cum $(m', n') = 1 \Rightarrow n' | k$.

Am obţinut astfel că $n' \mid k$ şi $k \mid n' \Rightarrow o(x^m) = k = n' = n/d = n/(m, n)$.

9.41. Avem $(xy)^{n_1 n_2} = x^{n_1 n_2} \cdot y^{n_1 n_2} = (x^{n_1})^{n_2} \cdot (y^{n_2})^{n_1} = 1$.

Fie acum $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(xy)^n = 1$; atunci $x^n = y^{-n}$ şi $x^{nn_2} = (y^{n_2})^{-n} = 1 \Rightarrow n_1 \mid nn_2$ şi cum $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow n_1 | n$. Analog se demonstrează că $n_2 \mid n$, deci $n_1n_2 \mid n$. Prin urmare avem echivalenţa $(xy)^n = 1 \Leftrightarrow n_1n_2 \mid n$, deci $o(xy) = n_1n_2 = o(x)\cdot o(y)$.

Să presupunem că $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$ şi fie $n = [n_1, n_2]$.

În mod evident $(xy)^n = 1$, adică $o(xy) \mid n$. Fie acum $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(xy)^k = 1$. Atunci $x^k y^k = 1$, deci $x^k = y^{-k} \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$, adică $x^k = y^{-k} = 1$, de unde $n_1 | k$ şi $n_2 \mid k$, deci $n \mid k$, ceea ce arată că $o(xy) = n$.

9.42. Să probăm la început existența lui y şi z. Din $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow$ există $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha n_1+\beta n_2 = 1$.

Astfel, dacă $x\in G$, $x = x^1 = x^{\alpha n_1+\beta n_2} = x^{\alpha n_1} \cdot x^{\beta n_2}$

Alegem $y = x^{\beta n_2}$ iar $z = x^{\alpha n_1}$. Obținem $o(y) = o(x^{\beta n_2}) = o(x)/(n_1n_2, \beta n_2) = (n_1n_2)/n_2 = n_1$ şi analog deducem că $o(z) = n_2$.

Să probăm acum unicitatea scrierii lui x; dacă $x = y_1z_1 = z_1y_1$ cu $o(y_1) = n_1$ şi $o(z_1) = n_2$, atunci $x = yz = y_1z_1 \Rightarrow y_1^{-1} y = z_1z^{-1} \Rightarrow (y_1^{-1} y)^{n_1} = 1$ şi $(y_1^{-1} y)^{n_2} = (z_1z^{-1})^{n_2} = 1 \Rightarrow (y_1^{-1} y)^{\alpha n_1+\beta n_2} = [(y_1^{-1} y)^{n_1}]^{\alpha} \cdot [(y_1^{-1} y)^{n_2}]^{\beta} = 1 \Rightarrow y = y_1$ şi analog $z = z_1$.

9.43. Deoarece x comută cu $[x, y] = x^{-1}(y^{-1}xy)$ deducem că $[x, y]^m = x^{-m}(y^{-1}xy)^m = x^{-m} y^{-1}x^m y = [x^m, y] = [1, y] = 1$ şi analog $[x, y]^n = 1$.

Deoarece $d = (m, n)$, exista $u, v\in\mathbb{Z}$ astfel încât $d = mu + nv$ şi astfel

$$[x, y]^d = [x, y]^{mu}\cdot[x, y]^{nv} = 1^u\cdot 1^v = 1.$$

9.44. (i). $\Rightarrow$ (ii). Fie $f : G \to G$, $f(x) = x^2$, pentru orice $x\in G$. Atunci f este injectivă ($x^2 = y^2 \Rightarrow (xy^{-1})^2 = 1 \Rightarrow xy^{-1} = 1 \Rightarrow x = y$ căci în caz contrar, conform teoremei lui Lagrange, ar trebui ca $2 \mid |G|$ - absurd) şi cum $(G,\cdot)$ este este grup finit, se obține că f este bijecție, de unde ecuația $x^2 = a$ are o unică soluție $x_0\in G$, pentru orice $a\in G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Evident, căci există un singur element $x\in G$ astfel încât $x^2 =1$, şi anume $x = 1$. Restul se dispun în perechi de forma (x, x^{-1}), unde $x \neq x^{-1}$ (căci dacă $x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = 1$). Aşadar $ord(G) = 2k+1$, $k\in\mathbb{N}^*$.

9.45. $x = 1$ este o soluție comună a celor două ecuații.

"$\Leftarrow$". Dacă $(m, n) = 1 \Rightarrow$ există $u, v\in\mathbb{Z}$ astfel încât $mu + nv = 1$. Dacă x_0 este o soluție comună a celor două ecuații avem $x_0^{mu} = 1$ şi $x_0^{nv} = 1 \Rightarrow x_0 = x_0^{mu+nv} = 1$.

"$\Rightarrow$". Dacă $d = (m, n)$, există $a, b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $ma + nb = d$. Atunci soluția comună x_0 a celor două ecuații va fi soluție şi a ecuației $x^d = 1$ şi reciproc.

Într-adevăr : $x_0^m = x_0^n = 1 \Rightarrow x_0^d = x_0^{ma+nb} = 1$. Reciproca este evident adevărată.

Dacă $d \geq 2 \Rightarrow$ d are cel mult un divizor prim p. Atunci orice element de ordin p din G este soluție a ecuației $x^d = 1$. Cum există astfel de elemente în G (conform teoremei lui Cauchy) rezultă că ecuația $x^d = 1$ nu are soluție unică, contradicție cu ipoteza în cazul $d \geq 2$.

În concluzie, rămâne doar cazul $d = 1$.

9.46. Presupunând că G este abelian, atunci $ab = ba$. Considerăm $H = \{1, a, b, ab\}$. Deoarece G este presupus abelian, $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$, $a\cdot(ab) = a^2b = b$, $b\cdot(ab) = ab^2 = a$ şi astfel H este subgrup în G. Din teorema lui Lagrange avem $|H| \mid |G|$, contradicție căci $|H| = 4$ şi $|G| = 10$.

9.47. Scriem $\prod_{x\in G} x = (\prod_{\substack{x\in G\\ o(x)>2}} x)\cdot(\prod_{\substack{x\in G\\ o(x)\leq 2}} x)$ şi vom demonstra că $\prod_{\substack{x\in G\\ o(x)>2}} x = 1$(*).

Dacă $x\in G$ cu $o(x)>2$, atunci $o(x) = o(x^{-1})>2$. Dar $x \neq x^{-1}$, căci în caz contrar ar rezulta că $x^2 = 1$.

Astfel în produsul (*) dacă apare un factor x, atunci apare şi factorul x^{-1}, deci în produsul (*) factorii se grupează doi câte doi (fiecare cu inversul său), de unde rezultă că produsul (*) este 1, deci $\prod_{x\in G} x = \prod_{\substack{x\in G\\ o(x)\leq 2}} x$.

Pentru a demonstra teorema lui Wilson, se ține cont de faptul că pentru p prim singurele elemente din $\mathbb{Z}_p^*$ de ordin ≤ 2 sunt $\hat{1}$ şi $\widehat{p-1} = -\hat{1}$, deci conform celor de mai înainte $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\widehat{p-1} = -\hat{1} \Rightarrow p \mid (p-1)! + 1$

9.48. ([32]) Fie p prim şi $n\in\mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Avem că $U(\mathbb{Z}_{p^n}^*, \cdot) = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_{p^n}^* : (a, p) = 1\}$. Să determinăm în acest grup elementele $\hat{a} \in U(\mathbb{Z}_{p^n}^*, \cdot)$ astfel încât $\hat{a}^2 = \hat{1}$, adică acele numere naturale a astfel încât $1 \le a < p^n$ cu $(a, p) = 1$ şi $p^n \mid a^2 - 1$ (*).

Evident a = 1 verifică condițiile de mai sus.

Dacă a > 1, atunci putem scrie $a - 1 = p^k u$ şi $a + 1 = p^t v$ cu $k, t \ge 0$, $(p, u) = (p, v) = 1$ iar $k + t \ge n$.

Dacă $k = 0 \Rightarrow t \ge n \Rightarrow p^n \mid a+1$ şi cum $a < p^n \Rightarrow a+1 = p^n \Rightarrow a = p^n-1$ şi astfel obținem şi elementul $\hat{a} = \widehat{p^n-1} = -\hat{1}$ ce verifică condițiile (*).

Dacă $t = 0 \Rightarrow k > n \Rightarrow p^n \mid a-1$ şi cum $a < p^n \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$, contradicție !

Dacă $k \ne 0$, $t \ne 0 \Rightarrow 2 = p^t v - p^k u \Rightarrow p \mid 2$; pentru $p > 2$ obținem o contradicție.

Deci, dacă p > 2 atunci în $U(\mathbb{Z}_{p^n}^*, \cdot)$ avem numai elementele $-\hat{1} = \widehat{p^n - 1}$ şi $\hat{1}$ care au ordinul cel mult 2, obținând astfel concluzia cerută de la (ii).

Dacă p = 2, atunci din $2 = 2^t v - 2^k u \Rightarrow t = 1$ sau $k = 1$.

Dacă $t = 1 \Rightarrow k \ge n-1 \Rightarrow a-1 = 2^k u \ge 2^{n-1} u$ şi cum $1 < a < 2^n \Rightarrow u = 1$ şi $k = n-1$. Deci în acest caz, dacă a verifică condițiile (*) $\Rightarrow a = 2^{n-1} + 1$.

Dacă $k = 1 \Rightarrow t \ge n-1 \Rightarrow a + 1 = 2^t v \ge 2^{n-1} v$ şi cum $1 < a < 2^n \Rightarrow v = 1$ sau $v = 2$ (cazul v = 2 este exclus deoarece (v, 2) = 1).

Dacă $v = 1 \Rightarrow t = n-1$ sau $t = n$. În cazul $t = n-1 \Rightarrow a = 2^{n-1}-1$ iar $t = n \Rightarrow a = 2^n - 1$.

În concluzie : dacă p = 2 şi n > 2 în $U(\mathbb{Z}_{2^n}^*, \cdot)$ numai elementele $-\hat{1}$, $\hat{1}$, $\widehat{2^{n-1}-1}$ şi $\widehat{2^{n-1}+1}$ au ordinul cel mult 2, obținând concluzia cerută de (i).

Acum, concluziile cerute de (iii) (varianta de generalizare a teoremei lui Wilson) rezultă ținând cont de (i), (ii) şi de exercițiul 9.47**.**

9.49. (i). Să notăm $H_n = U_{p^n}$ şi $y_n = \cos\frac{2\pi}{p^n} + i\sin\frac{2\pi}{p^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $z\in H_n \Rightarrow z^{p^n} = 1 \Rightarrow z^{p^{n+1}} = (z^{p^n})^p = 1^p = 1 \Rightarrow z\in H_{n+1} \Rightarrow H_n \subset H_{n+1}$ (această incluziune este strictă deoarece $y_{n+1}\in H_{n+1}$ şi cum $(y_{n+1})^{p^n} = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p} \ne 1 \Rightarrow y_{n+1} \notin H_n$).

(ii). Rezultă imediat din (i).

(iii). Fie $H \le U_{p^\infty}$, $H \ne U_{p^\infty}$ şi n cel mai mic număr natural pentru care $y_n\in H$ şi $y_{n+1}\notin H$. Vom demonstra că $H = H_n$.

Incluziunea $H_n \subseteq H$ este evidentă (deoarece $H_n = \langle y_n \rangle$ iar $y_n\in H$).

Fie $z\in H \subset U_{p^\infty} \Rightarrow$ există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât $z\in H_m \Rightarrow o(z) \mid p^m \Rightarrow o(z) = p^r$ cu $0 \le r \le m$. Deci z este o rădăcină de ordin p^r a unității $\Rightarrow z = y_r^k$ cu $(k, p^r) = 1$.

Cum există $a, b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $ak + bp^r = 1 \Rightarrow y_r = y_r^{ak+bp^r} = (y_r^k)^a = z^a \in H \Rightarrow r \le n$ şi cum $H_r \subset H_n \Rightarrow z\in H_n \Rightarrow H \subseteq H_n \Rightarrow H = H_n$.

9.50. Dacă $M, N\in GL_n(A)$, atunci $\det(M), \det(N)\in U(A^*, \cdot)$ şi cum $\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N) \Rightarrow MN\in GL_n(A)$.

Evident $I_n \in GL_n(A)$ iar dacă $M \in GL_n(A)$, cum $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$ deducem că $\det(M^{-1}) \in U(A^*,\cdot)$, adică $M^{-1} \in GL_n(A)$.

Rezultă astfel că $(GL_n(A),\cdot)$ este grup.

Dacă M, $N \in SL_n(A)$, atunci $\det(M) = \det(N) = 1$ şi deoarece $\det(MN^{-1}) = \det(M)\cdot(\det(N))^{-1} = 1\cdot 1^{-1} = 1$ deducem că $MN^{-1} \in S_n(A)$, adică $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$.

9.51. Dacă V este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul finit K cu q elemente, atunci $|V| = q^n$ şi se observă imediat că $|GL_n(K)|$ este egal cu numărul sistemelor ordonate $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de elemente ale lui V ce constituie baze ale lui V peste K.

Însă pentru a alege o bază a lui V peste K, putem alege mai întâi pe e_1 ca fiind orice element al lui V (avem q^n-1 posibilităţi), apoi pe e_2 ca fiind orice element al lui V care nu este de forma ae_1, cu $a \in K$ (şi avem q^n-q posibilităţi); apoi pe e_3 ca fiind orice element din V care nu este de forma $a_1e_1+a_2e_2$ cu $a_1,a_2 \in K$ (şi avem q^n-q^2 posibilităţi), e.t.c.

În concluzie $|GL_n(K)| = (q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$.

9.52. Să demonstrăm la început că dacă $y, z \in G$ şi $y^n = z^n$, atunci y = z.

Dacă m = | G |, deoarece (m, n) = 1, există $s, t \in \mathbb{Z}$ astfel încât ms + nt = 1.

Atunci $y = y^{ms+nt} = y^{nt} = z^{nt} = z^{ms+nt} = z$, deoarece ordinele lui y şi z divid pe m.

Rezultă atunci că mulţimea $\{y^n : y \in G\}$ conţine m elemente diferite ale lui G, adică coincide cu G, de unde şi faptul că $x = y^n$ pentru un singur y.

9.53. (i). Cum (G, ·) este un grup cu n elemente, atunci $x^n = 1$, pentru orice $x \in G$. Aceasta înseamnă că $G \subset U_n$. Dar atât G cât şi U_n au câte n elemente, ceea ce arată că $G=U_n$.

(ii). Notăm $\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Atunci $G = U_n = \{1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}\}$.

Fie k = nq + r cu 0 ≤ r < n şi deci, notând cu S suma din enunţ, rezultă :

$$S = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = 1 + \xi^k + \xi^{2k} + \ldots + \xi^{(n-1)k} =$$
$$=1 + (\xi^n)^q\cdot\xi^r + (\xi^n)^{2q}\cdot\xi^{2r} + \ldots + (\xi^n)^{(n-1)q}\cdot\xi^{(n-1)r} = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \ldots + \xi^{(n-1)r}.$$

Deci dacă r = 0, atunci S = n, iar dacă r > 0, atunci :

$$S = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \ldots + \xi^{(n-1)r} = \frac{1-(\xi^r)^n}{1-\xi^r} = \frac{1-(\xi^n)^r}{1-\xi^r} = \frac{1-1}{1-\xi^r} = 0.$$

9.54. (i). Fie $a \in A$ fixat şi $x \in G \setminus A$. Atunci $ax \in A$ (dacă $ax \notin A \Rightarrow ax \in G \setminus A$ şi cum $x \in G \setminus A \Rightarrow a \in G \setminus A$- contradicţie)

Fie $f : G \setminus A \to A$, f(x) = ax. Atunci f este injectivă.

Dacă $G \setminus A$ este infinită ⇒ A infinită (deoarece f este injectivă) – contradicţie.

Deci $G \setminus A$ este finită ⇒ $G = (G \setminus A) \cup A$ = finit.

Fie |G| = m şi |A| = n ⇒ $|G \setminus A|$ = m-n. Deoarece $G \setminus A \le G$, atunci m-n | m ⇒ m-n = m ⇒ n = 0- imposibil sau m-n ≤ m/2 ⇒ m ≤ 2n ⇒ |G| ≤ 2|A|.

(ii). m-n | m ⇒ m-n | m-n+n ⇒ m-n | n.

Dacă n este prim ⇒ m-n = 1 sau m-n = n, deci m = n+1 sau m = 2n.

9.55. (i). Definim $f : (C\cap B/C\cap A)_d \to (B/A)_d$ prin $f((C\cap A)x) = Ax$, pentru orice $x \in C\cap B$.

Dacă $x, y \in C\cap B$ şi $(C\cap A)x = (C\cap A)y$, atunci $xy^{-1} \in C\cap A \le A$, deci Ax = Ay, adică f este corect definită.

Dacă $x, y \in C\cap B$ şi $Ax = Ay \Rightarrow xy^{-1} \in C \cap A \Rightarrow (C \cap A)x = (C \cap A)y$, adică f este injectivă, de unde rezultă că $|(C\cap B/C\cap A)_d| \le |(B/A)_d| \Leftrightarrow |(C \cap B) : (C \cap A)| \le |B : A|$.

(ii). Cum $A \le G$, conform cu (i) avem

$$|G : A| \ge |(G \cap B) : (B \cap A)| = |B : (A\cap B)|,$$

prin urmare $|G : A| \cdot |G : B| \ge |B : (A \cap B)| \cdot |G : B| = |G : (A \cap B)|$.

(iii). Cum $B \leq A \vee B$, conform cu (i) avem:

$$| A \vee B | \geq | (A \vee B) \cap A : (A \cap B) | \Leftrightarrow | (A \vee B) : B | \geq | A : (A \cap B) | .$$

(iv). Conform lui (ii) avem:

$| G : (A \cap B) | \leq | G : A | \cdot | G : B |$, deci $| G : (A \cap B) |$ este finit.

De asemenea, $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | A : (A \cap B) | = | G : B | \cdot | B : (A \cap B) |$.

Cum $| G : A |$ şi $| G : B |$ sunt prime între ele, rezultă că $|G : A|$ divide $|B : (A \cap B)|$, deci $| G : A | \leq | B : (A \cap B) |$.

Pe de altă parte, din (iii), avem că $| G : A | \geq | (A \vee B) : A | \geq | B : (A \cap B) |$.

Prin urmare $| G : A | = | B : (A \cap B) |$ şi $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | G : B |$.

(v). În cazul în care G este finit, relația $| G : (A \cap B) | = | G : A | \cdot | G : B |$ se scrie $|G| / |A \cap B| = (|G| / |A|) \cdot (|G| / |B|)$, de unde rezultă că $|G| = (|A| \cdot |B|) / |A \cap B| = |AB|$ şi astfel $G = AB$.

9.56. Fie $H = \langle \rho \rangle \leq \mathbf{D}_n$; deoarece $o(\rho) = n$ deducem că H este subgrup ciclic de ordin n. Orice element din $\mathbf{D}_n \setminus H$ este de forma $\rho^k\varepsilon$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. De asemenea, avem că $\varepsilon\rho = \rho^{n-1}\varepsilon = \rho^{-1}\varepsilon$. Dacă presupunem că $\varepsilon\rho^k = \rho^{-k}\varepsilon$, atunci $\varepsilon\rho^{k+1} = \varepsilon\rho\rho^k = \rho^{-1}\varepsilon\rho^k = \rho^{-1}\rho^{-k}\varepsilon = \rho^{-(k+1)}\varepsilon$, prin urmare $\varepsilon\rho^k = \rho^{-k}$ pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n-1$ şi $(\rho^k\varepsilon)^2 = \rho^k\varepsilon\rho^k\varepsilon = \rho^k\rho^{-k}\varepsilon^2 = 1$.

Rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{D}_n \setminus H$ avem $o(x) = 2$.

Dacă $H' = \langle x \rangle$, $x \in \mathbf{D}_n$ (iar $\mathbf{D}_n$ este grup ciclic de ordin n) atunci $o(x) = n > 2$, deci $x \in H$. Dar atunci $H' \leq H$, $| H' | = | H | = n$, deci $H = H'$.

9.57. Avem că $\mathbf{D}_n = \{\rho^k\varepsilon^t : k = 0, 1, \ldots, n-1, \text{ iar } t = 0,1\}$. Pentru $k, r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avem $\rho^k (\rho^r\varepsilon) = \rho^{k+r}\varepsilon$ şi $(\rho^k \varepsilon)\rho^r = \rho^{r-k}\varepsilon$, prin urmare $\rho^k (\rho^r\varepsilon) = (\rho^r\varepsilon)\rho^k \Leftrightarrow k + r \equiv r - k \pmod n \Leftrightarrow 2k \equiv 0 \pmod n$.

Rezultă că un element de forma $\rho^r\varepsilon$, $r = 0, 1, \ldots, n-1$ nu face parte din $Z(\mathbf{D}_n)$. În plus, $\rho^k \in Z(\mathbf{D}_n) \Leftrightarrow 2k \equiv 0 \pmod n$. Dacă n este impar, rezultă că $k = 0$, deci $|Z(\mathbf{D}_n)| = 1$, iar dacă n este par, $n = 2m$, atunci $k = 0$ sau $k = m$, adică $Z(\mathbf{D}_n) = \{1, \rho^m\}$, deci $|Z(\mathbf{D}_n)| = 2$.

Capitolul 10 : Complemente de algebră liniară

10.1. (i). Dacă $A=(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ atunci:

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\overline{a_{1\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det(A)} .$$

(ii). Conform cu (i) avem $\det(A \cdot \overline{A}) = \det(A) \cdot \det(\overline{A}) = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \geq 0$.

(iii). Avem $A^2+B^2 = (A+iB)(A-iB) = C \cdot \overline{C}$ (unde $C=A+iB$) şi totul rezultă din (ii).

(iv). Rezultă din (iii) alegând $B = I_n$.

10.2. (i). Prin calcul direct.

(ii). Dacă există $k \geq 2$ astfel încât $A^k = O_2$ deducem că $\det(A)=0$, astfel că $A^2=(a+d)A$ şi deci $O_2 = A^k=(a+d)^{k-1}A$. Cum $A \neq O_2$ atunci cu necesitate $a+d=0$ şi astfel $A^2=0 \cdot A=O_2$.

10.3. Condiția $\det(A^3-A^2) = 1$ este echivalentă cu $\det(A^2)\det(A-I_2) = 1$, de unde $\det(A^2) = \det(A-I_2) = 1$ (căci $\det(A^2) \geq 0$), sau $\det(A) = \pm 1$ şi $\det(A-I_2) = 1$.

Avem astfel sistemele: $\begin{cases} ac - b = 1 \\ (a-1)(c-1) - b = 1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ac - b = -1 \\ (a-1)(c-1) - b = 1 \end{cases}$.

Primul sistem este echivalent cu $\begin{cases} ac - b = 1 \\ a + c = 1 \end{cases}$ iar al doilea cu $\begin{cases} ac - b = -1 \\ a + c = -1 \end{cases}$.

Deducem imediat că $b = -a^2+a-1$ şi $c = 1-a$, cu $a\in\mathbb{Z}$ (în primul caz) şi respectiv $b=-a^2-a+1$ şi $c = -1-a$, cu $a\in\mathbb{Z}$ (în al doilea caz).

10.4. ([49]) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ o soluție a ecuației.

Obținem, folosind $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$,

$$(1) \quad (\det(X))^{n-2}\cdot\det(X+iI_2)\cdot\det(X-iI_2) = 0.$$

Dacă $\det(X+iI_2)=0$ rezultă $(a+i)(d+i)-bc=0$, de unde $\begin{cases} ad-bc=1 \\ a+d=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} d=-a \\ bc=-1-a^2 \end{cases}$.

Prin urmare, $X^2=\begin{pmatrix} a^2-1-a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$, adică $X^2+I_2 = O_2$, relație din care

$$X^n + X^{n-2} = O_2, \text{ contradicție.}$$

Deci $\det(X+iI_2) \neq 0$. Analog $\det(X-iI_2) \neq 0$.

Din relația (1), rezultă $\det(X)=0$ şi înlocuind în relația cunoscută, $X^2-(a+d)X + \det(X)\cdot I_2 = O_2$ (conform exercițiului 10.2., (i)), obținem $X^2 =(a+d)X$ şi de aici $X^k=(a+d)^{k-1}X$, cu $k\in\mathbb{N}^*$.

Dacă notăm $\alpha = a+d$, relația $X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, prin identificarea elementelor devine: $a(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = 1$, $d(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = 1$, $b(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = -1$, $c(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = -1$.

Adunând primele două relații rezultă $\alpha^n+\alpha^{n-2}-2 = 0$.

Dacă $f(\alpha) = \alpha^n+\alpha^{n-2}-2$, rezultă $f'(\alpha) = \alpha^{n-3}(n\alpha^2+n-2)$.

Dacă n este par, atunci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi $f(-1) = f(1) = 0$.

Dacă n este impar, atunci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $f(1) = 0$.

Rezultă posibilitățile:

$$X = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru n impar}$$

$$X = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru n par,}$$

matrice care verifică relația din enunț.

10.5. Se arată uşor că $Y = \frac{1}{2}\cdot(X+AX)$ şi $Z = \frac{1}{2}\cdot(X-AX)$ verifică condițiile din enunț. Pentru partea de unicitate fie (Y', Z') o altă soluție a exercițiului.

Atunci $Y+Z = Y'+Z'$, $AY = Y$, $AY' = Y'$, $AZ = -Z$, $AZ' = -Z'$. Deci $Y-Y' = Z'-Z$. Pe de altă parte, $A(Y-Y') = AY-AY' = Y-Y'$; $A(Z'-Z) = AZ'-AZ = -Z'+Z$, şi deci avem şi $Y-Y' = -(Z'-Z)$, adică $Y-Y' = Z - Z' = 0$ şi prin urmare, $Y = Y'$ şi $Z = Z'$.

10.6. Cum în condițiile enunțului avem $(A+Bi)(A-Bi) = -i(AB-BA)$ deducem că $\det(A+Bi)\cdot\det(A-Bi) = (-i)^n\cdot\det(AB-BA)$.

Dacă $\det(A+Bi) = a+bi$ (cu $a, b\in\mathbb{R}$), atunci $\det(A-Bi) = a-bi$ astfel că obținem egalitatea $a^2+b^2 = (-i)^n\cdot\det(AB-BA)$, de unde se deduc imediat concluziile de la (i), (ii) şi (iii).

10.7. Din relația $ABAB = O_2$ rezultă $B(ABAB)A = O_2$ adică $(BA)^3 = O_2$. Dacă $X\in M_2(\mathbb{R})$ şi $X^3 = O_2$, atunci $X^2 = O_2$ (vezi exercițiul 10.2., (ii)), adică $(BA)^2 = BABA = O_2$.

În cazul lui $M_3(\mathbb{R})$, un contraexemplu este oferit de perechea de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.8. (i), (ii), (iii) se deduc imediat prin calcul, iar (iv) rezultă din (iii).

10.9. Condiţia din enunţ este echivalentă cu $(I_n-A)(I_n-B) = I_n$ adică $I_n - A$ este inversabilă şi $(I_n-A)^{-1}=I_n-B$.

Astfel şi $(I_n - B)(I_n - A)=I_n$, de unde concluzia că BA = A+B = =AB.

10.10. (i). Într-un prim mod calculăm det(A) cu regula lui Sarrus iar în alt mod adunând ultimele două linii la prima.

(ii). Fie $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ iar $E_i = a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3a_ib_ic_i$, (i = 1, 2).

Ţinând cont de (i) avem: E_i=-det(A_i), unde $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ b_i & c_i & a_i \\ c_i & a_i & b_i \end{pmatrix}$, i =1, 2, astfel că

$E_1 \cdot E_2 = \det(A_1)\cdot\det(A_2) = \det(A_1\cdot A_2)$ iar prin calcul avem că $A_1\cdot A_2 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix}$, deci

$$E_1\cdot E_2 = \det(A_1\cdot A_2) = a_3^3 + b_3^3 + c_3^3 - 3a_3b_3c_3$$

cu $a_3 = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$, $b_3 = a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2$ şi $c_3 = a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2$.

10.11. (i). Prin calcul.

(ii). Notăm s = a+b+c şi s´ = a´+b´+c´.

Utilizând regula lui Laplace, proprietăţile elementare ale determinanţilor şi (i) avem:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c') =$$
$$= -\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & 1 \\ c' & a' & 1 \\ b' & c' & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & C & s \\ s' & s' & 3 \\ B & A & s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & C & ss' \\ 1 & 1 & 3 \\ B & A & ss' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & C & B \\ 1 & 1 & 1 \\ B & A & C \end{vmatrix}$$

(am sumat la ultima coloană opusele primelor două)

$= A^2+B^2+C^2 - AB-AC-BC$.

10.12. Totul rezultă din regula lui Laplace dezvoltând determinantul $\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix}$ după primele m coloane.

10.13. Totul rezultă din regula lui Laplace dezvoltând determinantul $\det\begin{pmatrix} O_n & A \\ B & C \end{pmatrix}$ după primele n coloane.

10.14. La coloana k a matricei $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ adunăm coloana n+k înmulţită cu -i ($1 \le k \le n$) şi obţinem că

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ B-iA & A \end{pmatrix}.$$

Acum la linia n+k a ultimei matrice adunăm linia k înmulţită cu i ($1 \le k \le n$) şi obţinem că $\det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ B-iA & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ O_n & A-iB \end{pmatrix}$.

Astfel (ţinând cont şi de exerciţiile 10.1. şi 10.12.) obţinem că:

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\cdot\det(A-iB) = \det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)} = \left|\det(A+iB)\right|^2$$

10.15. Dacă notăm A = $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ şi B = $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ atunci M=$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, deci conform exerciţiului 10.14. avem că $\det(M) = \left|\det(A+iB)\right|^2$ şi cum

$$\det(A+iB) = \begin{vmatrix} a+ic & -b+id \\ b+id & a-ic \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

deducem că det(M) = $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

10.16. (i). Se calculează $A \cdot A^t$.
(ii). Se ţine cont de formula det(AB) = det(A) · det(B).
(iii). Rezultă direct din (ii).

10.17. (i), (ii). Prin calcul direct utilizând proprietăţile determinanţilor.

10.18. Din linia i se scade linia 1 înmulţită cu $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, i = 2,…, n.

10.19. Fie E = $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$. Considerăm matricea $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, B = (b_{ij}) cu $1 \le i \le n$ şi $1 \le j \le p$, unde $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } e_j \in A_i \\ 0, & \text{dacă } e_j \notin A_i \end{cases}$ şi astfel $A = B^t \cdot B$.

Totul rezultă acum din regula lui Laplace.

10.20. det(A) = $n(-1)^{n-1}$.

10.21. det(A) = 1.

10.22. det(A) = $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$.

10.23. (i). Paritatea rezultă din faptul că toţi termenii determinantului sunt numerele 1 şi –1 şi ei eventual se reduc doi câte doi.

(ii).Valoarea maximă este 4, de exemplu, pentru matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Valoarea minimă este –4.

10.24. Valoarea maximă pe care o poate lua det(A) este 2, de exemplu, pentru matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.25. Adunând prima linie la toate celelalte linii obținem o matrice care are pe liniile de rang 2, 3, …, n elementele 0, 2 sau –2, ceea ce ne permite să scoatem factor comun pe 2 de pe aceste linii.

10.26. Se aplică exercițiile 10.23. şi 10.25..
Se obține valoarea maximă 16, iar cea minimă –16.

10.27. Deducem imediat că det(X) = 0 şi astfel dacă X=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$∈$M_2(\mathbb{C})$, atunci $X^2=\alpha X$, deci $X^n=\alpha^{n-1}X$ (cu α=a+d). Obținem că $\alpha^{n-1}X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, adică $\alpha^{n-1}a=2$, $\alpha^{n-1}b=3$, $\alpha^{n-1}c=4$ şi $\alpha^{n-1}d=6$. Deducem imediat că $\alpha^n=\alpha^{n-1}(a+d)=\alpha^{n-1}a+\alpha^{n-1}d=2+6=8$ şi prin urmare $X=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ cu $\alpha^n=8$.

10.28. Avem $A^t\cdot(A^{-1})^t=(A^{-1}\cdot A)^t=I_n^t=I_n$, de unde concluzia că $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

10.29. Ținând cont de exercițiul 10.28., avem: $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1}$, adică A^{-1} este simetrică.

10.30. Dacă $A = O_2$, totul este clar.
Să presupunem că A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\neq O_2$. Relația $A^k=O_2$, implică det(A) = 0 şi deci $A^2 = (a+d)A$. Rezultă $O_2=A^k=(a+d)^{k-1}A$, deci a+d = 0. Prin urmare, $A^2=O_2$. Atunci $I_2+A+A^2+\ldots+A^{k-1}=I_2+A=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ şi deci $\det(I_2+A+\ldots+A^{k-1})=(a+1)(d+1)-bc=1$.

10.31. Atât (i) cât şi (ii) se verifică direct prin calcul.

10.32. Deducem imediat că A este de forma $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2}-x \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ cu x∈ℝ.

Astfel

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}-x & x & 2x-\frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 2x-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}=3x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}>0.$$

10.33. Putem scrie $\det(A+X)=\det(A)+x\sum_{i=1}^{n}D_i$, unde D_i este determinantul obținut din det(X) prin înlocuirea coloanei de ordin i cu coloana formată numai cu elemente egale cu 1 (1≤i≤n). Analog $\det(A-X)=\det(A)-x\sum_{i=1}^{n}D_i$, de unde deducem că

$$\det(A+X)\cdot\det(A-X)=\det^2(A)-x^2\Big(\sum_{i=1}^{n}D_i\Big)^2\leq\det^2(A).$$

10.34. Prin calcul direct. Pentru reciprocă facem în ($*$) pe A = B cu $\det(A) \neq 0$ şi deducem că $\det(2A) = 4\det(A) \Rightarrow 2^n = 4 \Rightarrow n = 2$.

10.35. Facem inducţie după n; pentru n=1 totul este clar, deoarece $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$ şi $d_1=d$. Scriind că $A^{n+1} = A^n \cdot A$, obţinem relaţiile de recurenţă: $\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + cb_n \\ b_{n+1} = ba_n + db_n \\ c_{n+1} = ac_n + cd_n \\ d_{n+1} = bc_n + dd_n \end{cases}$ pentru orice $n \geq 1$.

Să presupunem deci că $\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a-d}$.

Atunci $\frac{b_{n+1}}{b} = a_n + d \cdot \frac{b_n}{b}$, $\frac{c_{n+1}}{c} = d_n + a \cdot \frac{c_n}{c}$ şi astfel

$$\frac{b_{n+1}}{b} = \frac{c_{n+1}}{c} \Leftrightarrow a_n + d \cdot \frac{b_n}{b} = d_n + a \cdot \frac{c_n}{c} \Leftrightarrow a_n - d_n = a \cdot \frac{c_n}{c} - d \cdot \frac{b_n}{b}$$

$$\Leftrightarrow a_n - d_n = \frac{b_n}{b}(a-d),$$

ceea ce este adevărat, din ipoteza de inducţie.

Analog restul de egalităţi.

10.36. Deoarece $\det(A) = 0$, rezultă că $A^2-(3+10)A = O_2$, deci $A = 13^{1-n} \cdot A^n$, pentru orice $n \geq 1$. Rezultă că reprezentarea cerută este posibilă, alegând de exemplu, $X = 13^{(1-n)/n} \cdot \alpha^{1/n} \cdot A$ şi $Y = 13^{(1-n)/n} \cdot \beta^{1/n} \cdot A$, cu α, β numere reale arbitrare astfel încât $\alpha \neq \beta$, $\alpha+\beta = 1$.

10.37. Din $A^3 = A+I_n \Rightarrow A(A^2-I_n) = I_n \Rightarrow \det(A) \neq 0$. De asemenea, din $A^3 = A+I_n \Rightarrow A^3+A^2 = A^2+A+I_n \Rightarrow A^2(A+I_n) = A^2+A+I_n \Rightarrow \det(A+I_n) \geq 0$ şi revenind la $A^3 = A+I_n \Rightarrow \det(A) > 0$.

10.38. Vom demonstra pentru început următoarea:

Lemă. Fie P un polinom cu coeficienţi reali, fără rădăcini reale şi care are coeficientul puterii de gradul cel mai mare pozitiv. Atunci $\det(P(A)) \geq 0$, pentru orice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, P este de forma $P(x) = a\prod_{k=1}^{r}(x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}$, cu $a > 0$, $b_k^2 - 4c_k < 0$ şi $n_k \in \mathbb{N}^*$, pentru orice k.

Atunci $\det(P(A)) = a^n \prod_{k=1}^{r} \det(A^2 + b_k A + c_k I_n)^{n_k}$ şi rămâne să observăm că fiecare factor al produsului din membrul drept este pozitiv.

Se foloseşte faptul că $A^2 + b_k A + c_k I_n = \left(A_k - \frac{b_k}{2} \cdot I_n\right)^2 + \frac{4c_k - b_k^2}{4} \cdot I_n$,

pentru orice k şi că $\det(X^2+Y^2) \geq 0$, pentru orice X, $Y \in M_n(\mathbb{R})$ cu XY = YX (conform exerciţiului 10.1., (iii)).

Trecem la rezolvarea problemei date:

(i). Evident, $k \geq 3$. Din $A^k = A + I_n$ obţinem $A(A^{k-1} - I_n) = I_n$, deci $\det(A) \neq 0$.

Pe de altă parte, $A^{k+1} = A^2 + A$ şi deci $A(A-I_n)(A^{k-1} + \ldots + I_n) = A^2$.

Conform lemei, $\det(A^{k-1} + \ldots + A + I_n) > 0$.

Rezultă $\det(A(A-I_n))>0$.

Cum $k=2p+1$, din relația $A(A^{k-1} - I_n)=I_n$, deducem că $A(A^2-I_n)(A^{2(p-1)}+ \ldots+A^2+I_n)=I_n$ şi de aici că $\det(A+I_n)>0$.

Cum $A^k = A + I_n$ şi k este impar, concluzionăm că $\det(A) > 0$.

(ii). Fie k un numar par şi $A = \alpha I_n$.

Egalitatea $A^k = A + I_n$ este echivalentă cu $(\alpha^k-\alpha-1)I_n = O_n$. Deci $\alpha^k-\alpha-1 = 0$. Deoarece $f(\alpha)=\alpha^k-\alpha-1$ este continuă, $f(-\infty)=\infty$ şi $f(0) = -1$ rezultă că f admite o rădăcină $\alpha_0 < 0$ şi în acest caz $A = \alpha_0 I_n$ verifică relația $A^k = A + I_n$, dar $\det(A) = \alpha_0^n < 0$.

10.39. Deoarece matricele A, B, C comută între ele, putem scrie că: $M=A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=(A+\alpha B+\alpha^2C)(A+\alpha^2B+\alpha C)$, cu α rădăcina cubică a unității ($\alpha\neq 1$). Astfel, $\det(M)=\det(A+\alpha B+\alpha^2C)\cdot\det(A+\alpha^2B+\alpha C)$ şi, dacă $\det(A+\alpha B+\alpha^2C) = a+b\alpha+c\alpha^2$, atunci $\det(A+\alpha^2B+\alpha C) = a+b\alpha^2+c\alpha$ ($a, b, c\in\mathbb{R}$) şi astfel:

$$\det(M)=(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0.$$

10.40. Fie $X = A^2+B^2$ şi $Y = AB+BA$. Cum: $X+Y = A^2+B^2+AB+BA = (A+B)^2$ şi $X-Y = A^2+B^2-AB-BA = (A-B)^2$ obținem:

$$\det((A+B)^2)+\det((A-B)^2) = 2\det(A^2+B^2)+2\det(AB+BA)$$

(conform exercițiului 10.34.), deci

$$\det(A^2+B^2)=\frac{1}{2}\left[(\det(A+B))^2+(\det(A-B))^2-2\det(AB+BA)\right]$$

şi cum $\det(AB+BA)\leq 0$, rezultă $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

10.41. Dacă A este inversabilă atunci putem scrie $\alpha I_n+AB=A(\alpha I_n+BA)A^{-1}$ şi astfel

$$\det(\alpha I_n+AB)=\det(A)\det(\alpha I_n+BA)\det(A^{-1})=\det(\alpha I_n+BA).$$

Dacă A nu este inversabilă, observăm că exceptând o submulțime finită x de elemente din $\mathbb{C}$ avem $\det[\alpha I_n+(xI_n+A)B]=\det[\alpha I_n+B(xI_n+A)]$, pentru orice $\alpha\in\mathbb{C}$. Cum cei doi determinanți sunt polinoame în x egalitatea se menține şi în x=0, deci din nou obținem că $\det(\alpha I_n+AB)=\det(\alpha I_n+BA)$.

Fie acum P de forma $P=a(X-x_1)\ldots(X-x_n)$, cu $a, x_1, \ldots, x_n\in\mathbb{C}$.

Atunci $P(AB)=a\prod_{k=1}^{n}(AB-x_kI_n)$ şi $P(BA)=a\prod_{k=1}^{n}(BA-x_kI_n)$ şi astfel egalitatea $\det P(AB) = \det P(BA)$ este imediată.

10.42. Se ştie că dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ atunci $\det(AB-I_2)=\det(BA-I_2)$ şi $\det(AB+I_2)=\det(BA+I_2)$ (conform exercițiului 10.41.).

Rezultă că $\det[(AB-I_2)(BA-I_2)] = \det(AB-I_2)^2 = [\det(AB-I_2)]^2\geq 0$. (1)

Dar $(AB-I_2)(BA-I_2) = I_2-(AB+BA)$ (deoarece $B^2 = O_2$).

Analog $\det(I_2+(AB+BA))\geq 0$. (2).

Folosind acum relația: $\det(X+Y)+\det(X-Y) = 2[\det(X)+\det(Y)]$, pentru orice $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$ (conform exercițiului 10.34.), din (1) şi (2) rezultă

$$0\leq\det(I_2-(AB+BA))+\det(I_2+(AB+BA))=2[\det(I_2)+\det(AB+BA)]= 2[1+\det(AB+BA)],$$

adică $\det(AB+BA)\geq -1$. Din $B^2=O_2$ rezultă $\det(B) = 0$ deci $0 = 2[\det(AB)+\det(BA)] = \det(AB+BA)+\det(AB-BA)$ şi folosind prima inegalitate rezultă a doua.

Observație. Se poate demonstra de aici că

$$\det(AB-BA) \leq 0 \leq \det(AB+BA).$$

10.43. $\det(B^2+I_2) = 0 \Rightarrow \det(B+iI_2) \cdot \det(B-iI_2) = 0$.

Cum $B\in M_2(\mathbb{R})$, avem $\det(B+iI_2) = \det(B-iI_2) = 0$.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \det(B+xI_2)$. Avem $g(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha=\det(I_2)=1$, $\gamma=\det(B)$. Extinzând pe g la $\mathbb{C}$, pentru $x = i$, avem:

(1) $0 = \det(B+iI_2) = -1+\beta i+\det(B)$, deci $\beta = 0$ şi $\det(B) = 1$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \det(A+xB)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $f(x)=ax^2+bx+c$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $c = f(0) = \det(A)$ şi $a = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\det\left(\dfrac{A}{x}+B\right) = \det(B)$.

Relația din ipoteză se scrie sub forma $\sum\limits_{k=0}^{n} f((-1)^k C_n^k) = 0$. Ținând seama de forma funcției f, se obține egalitatea: $\det(B)\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 + b\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k + (n+1)\det(A) = 0 \Rightarrow$

(2) $$\det(B)C_{2n}^n + (n+1)\det(A) = 0 .$$

Din (1) şi (2) deducem că $\det(A) = -\dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$.

10.44. (i) $\Rightarrow$(ii). Dacă $p = 1 \Rightarrow A = O_2 \Rightarrow a = 0$, $b\in\mathbb{R}$, deci (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $p\geq 2$, astfel încât $A^p=O_2 \Rightarrow \det(A^p) = (\det(A))^p = 0$, deci $\det(A) = 0$.

Luăm $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(x+t)A+\det(A)\cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = (x+t)A$ şi prin inducție, $A^p = (x+t)^{p-1}A$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, deci (i) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = O_2 \\ sau \\ x+t=0 \end{cases}$.

Dacă $A = O_2 \Rightarrow a = 0$ şi $b\in\mathbb{R} \Rightarrow$ (ii).

Dacă $x+t = 0 \Rightarrow t =-x \Rightarrow A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x\end{pmatrix}$ şi $\det(A) = 0 \Rightarrow x^2+yz = 0$.

Luăm $x = a\cdot\cos b$ şi $y = a(1+\sin b)$, $z = a(-1+\sin b)$, cu $a, b\in\mathbb{R}$ şi astfel rezultă (ii).

(ii) $\Rightarrow$(i). Dacă $a = 0$, $b\in\mathbb{R} \Rightarrow A = O_2 \Rightarrow$ există $p = 1$ astfel încât $A^p = A^1 = O_2$.

Dacă $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R} \Rightarrow A^2 = O_2 \Rightarrow$există $p = 2\in\mathbb{N}^*$, $p>1$ astfel încât $A^p = O_2$.

10.45. Vom demonstra pentru început următoarea:

Lemă. Dacă două matrici pătratice X, Y verifică relația $XY = I_n$, atunci ele sunt nesingulare, $X^{-1} = Y$ şi $YX = I_n$.

Demonstrația lemei se bazează pe faptul că $XY = I_n$ implică $\det(X) \neq 0$. Rezultă că matricea X este inversabilă. Înmulțind la stânga relația $XY = I_n$ cu X^{-1} obținem $Y = X^{-1}$ deci şi $YX = I_n$.

Lema se aplică astfel:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Din relația $ABC = AB+BC$ deducem

$$(I_n-A)B(I_n-C) =(B-AB)(I_n-C) = B-BC-AB+ABC = B,$$

deci $(I_n-A)B(I_n-C)B^{-1} = I_n$.

Conform lemei, avem şi $(I_n-C)B^{-1}(I_n-A)B=I_n$, adică $(B^{-1}-CB^{-1})(I_n-A) = B^{-1}$.

Prin urmare, $B^{-1}-B^{-1}A-CB^{-1}+CB^{-1}A = B^{-1}$, deci $CB^{-1}A = CB^{-1}+B^{-1}A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se demonstrează analog.

10.46. „⇒". Presupunem că ecuația $X^{-1}\cdot X^t = A$ admite soluția $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Atunci $X^{-1} = \dfrac{1}{\det(X)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şi deci $A=X^{-1}\cdot X^t = \dfrac{1}{\det(X)}\begin{pmatrix} ad-b^2 & (c-b)d \\ (b-c)a & ad-c^2 \end{pmatrix}$,

unde evident impunem condiția $\det(X)\neq 0 \Leftrightarrow ad\neq bc$.

Deoarece $A\in M_2(\mathbb{R})$ şi orice matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația caracteristică A^2-tr(A)$\cdot$A+det(A)$\cdot I_2=O_2$, deducem că $\det(A) = \det(X^{-1})\cdot\det(X^t) = \dfrac{1}{\det(X)}\cdot\det(X)=1$ şi

$tr(A) = \dfrac{2ad-b^2-c^2}{ad-bc} = p$. Dacă $p=2 \Leftrightarrow (b-c)^2=0 \Leftrightarrow b=c \Leftrightarrow A=I_2$, obținem o contradicție. Deci există $p\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ astfel încât $A^2-pA+I_2 = O_2$, unde p a fost definit mai sus.

„⇐". Dacă există $p\in\mathbb{R}\setminus\{2)$ astfel încât $A^2-pA+I_2 = O_2$ şi $A\neq\lambda I_2$, folosim faptul că A verifică ecuația caracteristică A^2-tr(A)$\cdot$A+det(A)$\cdot I_2=O_2$, şi prin scădere deducem că (tr(A)-p)A = (det(A)-1)I_2, de unde p = tr(A) şi det(A) = 1.

Prin urmare A se scrie sub forma $A=\begin{pmatrix} u & v \\ \dfrac{-1+pu-u^2}{v} & p-u \end{pmatrix}$, cu $u, v\in\mathbb{R}$, $v\neq 0$ şi deducem că sistemul $\dfrac{ad-b^2}{ad-bc}=u$, $\dfrac{ad-c^2}{ad-bc}=p-u$, $\dfrac{(c-b)d}{ad-bc}=v$, $\dfrac{(b-c)a}{ad-bc}=\dfrac{pu-u^2-1}{v}$ are soluție doar dacă $p\neq 2$, şi anume $a=\dfrac{u^2-pu+1}{v^2}d$, $b=\dfrac{u-1}{v}d$, $c=\dfrac{u+1-p}{v}d$, unde $d\in\mathbb{R}^*$ şi deci matricea $X=\dfrac{d}{v}\begin{pmatrix} \dfrac{u^2-pu+1}{v} & u-1 \\ u-p+1 & v \end{pmatrix}$ satisface ecuația $X^{-1}\cdot X^t = A$.

10.47. Fie $A=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$, d = mq-np, m, n, p, q$\in\mathbb{R}$. Prin calcul direct avem: $\det(A+dA^*) = \begin{vmatrix} m+qd & n(1-d) \\ p(1-d) & q+md \end{vmatrix} = d[(d-1)^2+(m+q)^2]$, iar condiția din enunț devine d=1 şi m+q=0.

Atunci $\det(A-dA^*) = \det(A-A^*) = \begin{vmatrix} m-q & 2n \\ 2p & q-m \end{vmatrix} = -(m+q)^2+4(mq-np)=4d = 4$.

10.48. ([49]) Matricea A verifică ecuația sa caracteristică, deci $A^2-(a+d)A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$. Presupunem că există $n\geq 1$ astfel încât $A^n = I_2$. Rezultă că $(\det(A))^n=1$, deci $\det(A)\in\{-1, 1\}$. Considerăm polinoamele $f=X^2-uX+v$, $g=X^n-1$, unde u=a+d >2, iar $v\in\{-1, 1\}$. Ecuația f(x)=0 are rădăcinile x_1, x_2 reale deoarece $\Delta=u^2-4v>0$. Rădăcinile x_1, x_2 nu pot fi rădăcini ale ecuației g(x)=0, deoarece dacă $x_1^n-1=0$ rezultă $|x_1|=1$ şi cum $x_1^2-ux_1+v=0$, am avea $|u|=|ux_1|=|x_1^2+v|\leq|x_1|^2+|v|=2$, contradicție. Rezultă că polinoamele f şi g sunt prime între ele, deci există polinoamele cu coeficienți reali P şi Q astfel încât $P\cdot f+Q\cdot g=1$. Această egalitate fiind o identitate polinomială, se păstrează când înlocuim pe X prin matricea A, deci $P(A)f(A)+Q(A)g(A)=I_2$. Deoarece $f(A)=g(A)=O_2$, această egalitate matriceală devine $O_2=I_2$, contradicție.

10.49. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(A^2+B^2+C^2+BCx)$.
Avem că $f(2)=\det[A^2+(B+C)^2] > 0$ şi $f(-2) = \det[A^2+(B-C)^2] > 0$.
Să presupunem de exemplu că det(BC) = det(B)det(C) < 0.

Graficul lui f este o parabolă, deci $\det(A^2+B^2+C^2) = f(0) > 0$.

10.50. Fie $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $A \neq O_2$, astfel încât $A+A^t=aI_2 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow x = t$ şi $z = -y \Rightarrow A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Din $A \neq O_2$ rezultă că $\det(A) =$ $=x^2+y^2 \neq 0$, deci A este inversabilă.

Fie $B=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}A$.

Observăm că $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=1$, deci există $t\in[0, 2\pi)$ astfel încât $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos t$ şi $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin t \Rightarrow B=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Se verifică prin inducţie după $m\geq 0$, că $B^m=\begin{pmatrix} \cos mt & \sin mt \\ -\sin mt & \cos mt \end{pmatrix}$ şi apoi pentru $m\leq 0$, deci pentru $m\in\mathbb{Z}$. Atunci

$$A^m+(A^t)^m=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m (B^m+(B^t)^m) =\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m \begin{pmatrix} 2\cos mt & 0 \\ 0 & 2\cos mt \end{pmatrix} = bI_2,$$

pentru $b = 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m \cdot \cos mt$.

10.51. Dacă $A_k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, din $A_0A_k=A_kA_0$ rezultă $\frac{b_k}{b_0}=\frac{c_k}{c_0}=\frac{d_k-a_k}{d_0-a_0}=\alpha_k$ şi cum $A_0\neq aI_2 \Rightarrow b_0$, c_0, d_0-a_0 nu sunt toate nule, avem $b_k=\alpha_k b_0$, $c_k=\alpha_k c_0$, $d_k=\alpha_k d_0+\beta_k$, $a_k=\alpha_k a_0+\beta_k$, aşadar, $A_k=\alpha_k A_0+\beta_k I_2$, $1\leq k\leq n$.

(i). Dacă $\alpha_k=0$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ atunci $\sum_{k=1}^{n} A_k^2 =\left(\sum \beta_k^2\right)\cdot I_2$, deci $\det(\sum_{k=1}^{n} A_k^2)=\left(\sum \beta_k^2\right)^2 \geq 0$.

Dacă $\alpha=\sum \alpha_k^2 \neq 0$, atunci $\sum A_k^2 =\left(\sum \alpha_k^2\right)\cdot A_0^2+2\left(\sum \alpha_k\beta_k\right)A_0+\left(\sum \beta_k^2\right)I_2 = P(A_0)$,

P fiind un polinom de grad doi cu discriminantul:

$$\Delta=\left(\sum \alpha_k\beta_k\right)^2-\left(\sum \alpha_k^2\right)\left(\sum \beta_k^2\right)\leq 0.$$

Rezultă $P(z)=\alpha(z-z_0)(z-\overline{z_0})$, $z_0\in\mathbb{C}$, de unde $P(A_0)=\alpha(A_0-z_0I_2)(A_0-\overline{z_0}I_2)$, deci $\det P(A_0)=\alpha^2\left|\det(A_0-z_0I_2)\right|^2\geq 0$.

(ii). Din condiţia $A_2\neq aA_1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, rezultă $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\neq\frac{\beta_2}{\beta_1}$ adică $\Delta<0$, prin urmare $z_0\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$. Atunci $\det P(A_0)=0 \Rightarrow \det(A_0-z_0I_2)=0$ sau $\det(A_0-\overline{z_0}I_2)=0$, deci z_0 sau $\overline{z_0}$ este rădăcina ecuaţiei cu coeficienţi reali $\det(A_0-zI_2)=0$, deci ambele numere sunt rădăcini.

Din $\det(A_0-zI_2)=z^2-(a_0+d_0)z+(a_0d_0-b_0c_0)$ şi

$A_0^2-(a_0+d_0)A_0+(a_0d_0-b_0c_0)I_2=O_2$ rezultă P(A$_0$)=0, adică $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k^2=O_2$.

10.52. Pentru A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$∈M$_2$(ℂ) avem adjuncta A*=$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ şi respectiv transpusa A^t=$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$∈M$_2$(ℂ). Se observă că matricea C=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cu C^{-1}=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifică proprietatea din enunţ: A* = C · A^t · C^{-1}, pentru orice A∈M$_2$(ℂ). Dacă S∈M$_2$(ℂ) satisface de asemenea condiţia din enunţ, atunci: (C^{-1}S)A^t = A^t(C^{-1}S), pentru orice A∈M$_2$(ℂ) şi reciproc. Cum f: M$_2$(ℂ)→M$_2$(ℂ), f(A) = A^t, pentru orice A∈M$_2$(ℂ), este bijectivă, se obţine că C^{-1}S comută cu toate matricele din M$_2$(ℂ), deci se află în centrul lui M$_2$(ℂ).

Rezultă că există α∈ℂ astfel încât C^{-1}S = αI$_2$, deci S = αC.

Ca urmare, matricele căutate sunt de forma: $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, α∈ℂ*.

10.53. Fie P(X) = det(A + XI$_n$)∈ℚ[X]. P(X) şi X^n-2 nu sunt prime între ele în ℚ[X]. Într-adevăr, presupunând contrariul, există polinoamele R, S∈ℚ[X] astfel încât PR+(X^n-2)S = 1, de unde $R(\sqrt[n]{2})\cdot P(\sqrt[n]{2})=1$. Dar, din ipoteză, $P(\sqrt[n]{2})=0$, contradicţie.

Cum însă X^n-2 este ireductibil în ℚ[X] (conform criteriului lui Eisenstein), deducem că (X^n-2) | P.

Deoarece grad P = n şi P este monic, rezultă P = X^n-2.

Deci det(A+XI$_n$) = X^n-2 şi obţinem: det(A) = det(A+0·I$_n$) = -2; det(A+I$_n$)= =det(A+1·I$_n$) = -1; det(A-I$_n$) = det(A+(-1)·I$_n$) = (-1)^n-2.

Rezultă: det(A-I$_n$) = det(A)+(det(A+I$_n$))^n.

10.54. ([49]) Să notăm cu $A(a_1,a_2,...,a_n)$ matricea din M determinată de numerele $a_1,a_2,...,a_n$. Notăm cu A$_1$ = I$_n$ şi pentru orice i∈{2, …, n} A$_i$ matricea determinată de a$_{ij}$ = =δ$_{i,j-1}$. Se observă că $A(a_1,a_2,...,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iA_i$. Facem convenţia să identificăm pe n+i cu i, pe –i cu n-i pentru 1≤i≤n şi pe 0 cu n. Se observă uşor prin calcul că A$_i$A$_j$ = A$_j$A$_i$ = A$_{i+j}$, pentru 1≤i, j≤n.

Fie $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iA_i$ şi $B=\sum\limits_{j=1}^{n}b_jA_j$. Atunci:

$$AB=(\sum_{i=1}^{n}a_iA_i)\ (\sum_{j=1}^{n}b_jA_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_jA_iA_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_jA_jA_i)=\ (\sum_{j=1}^{n}b_jA_j)\ (\sum_{i=1}^{n}a_iA_i)=BA.$$

Reciproc, să presupunem că matricea B comută cu orice matrice A∈M. Atunci elementul a$_{ij}$ al matricei A$_2$ se poate scrie, ţinând cont de convenţia făcută, sub forma:

$$a_{ij}=\delta_{i,j-1}=\begin{cases}0 & pentru\ \ i\neq j-1,\\ 1 & pentru\ \ i=j-1\end{cases}.$$

Fie B=(b$_{ij}$)$_{1\le i,j\le n}$ matricea care comută cu orice matrice A∈M. Deci BA$_2$=A$_2$B sau $\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ik}\delta_j^{k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{k-1}^{i}b_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^ib_{k+1,j}$, de unde rezultă că b$_{i,j-1}$= b$_{i+1,j}$ pentru orice 1≤i, j≤n.

Facem pe rând pe i = 1, 2, …, n şi j = 1, 2, …, n şi obţinem:

$$b_{11}=b_{22}=...=b_{nn}=b_1,$$
$$b_{12}=b_{23}=...=b_{n-1,n}=b_{n,1}=b_2,$$

……………………………..

$$b_{1n} = b_{21} = b_{32} = ... = b_{n,n-1} = b_n,$$

de unde deducem că B = $A(b_1, b_2, ..., b_n) \in$M.

10.55. Avem:

$O_n = A\cdot O_n = A(aI_n+bA+cB+dAB) = aA+bA^2+cAB+dA^2B =$

$= aA+bA^2-cBA-dABA=(aI_n+bA-cB-dAB)A$, deci $aI_n+bA-cB-dAB = O_n$.

Rezultă $aI_n+bA = O_n$.

Dacă $b\neq 0$, atunci $a\neq 0$ şi $A = -\frac{a}{b}I_n$ deci $AB + BA = -\frac{2a}{b}B \neq O_n$, absurd, deci a=b=0. Cum $cB+dAB = O_n$ implică $cI_n+dA = O_n$ rezultă şi c = d = 0.

10.56. (i). Considerăm coloanele $i_1<…<i_k\in\{1, …, n\}$ ale matricei I_n. Observăm că singurul minor de ordin k nenul este format din liniile $i_1<…<i_k$, deci pentru oricare k dintre coloane, avem un singur minor nenul. Rezultă că numărul minorilor nenuli de ordin k este C_n^k şi că suma lor este 2^n-1.

(ii). Fie $k\in\{1, …, n\}$ fixat şi coloanele $i_1<…<i_k\in\{1, …, n\}$. Dacă toți minorii de ordin k care conțin aceste coloane ar fi nuli, atunci orice minor de ordin k+1 care conține aceste coloane ar fi nul. Analog, orice minor de ordin k+2, care conține aceste coloane ar fi nul, şi în final, det(A)=0, fals. Deci există un minor de ordin k cu elemente din aceste coloane care este nenul. Rezultă că avem cel puțin C_n^k minori de ordin k nenuli (putem alege C_n^k sisteme de k coloane din n) şi atunci numărul total este cel puțin 2^n-1.

10.57. Fie $P\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă astfel încât AP = PB. Atunci:

$$P = (z_{kj})_{k,j} = (u_{kj}+iv_{kj})_{k,j} = U+iV, \text{ unde } U, V\in M_n(\mathbb{R}).$$

Din relația A(U+iV) = (U+iV)B, separând partea reală şi partea imaginară, rezultă că AU = UB şi AV = VB.

Fie polinomul cu coeficienți reali f(x) = det(U+xV). Deoarece f(i) = det(P) $\neq$ 0, rezultă că f este nenul şi deci există $\alpha\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(\alpha) \neq 0$.

Atunci $\det(U+\alpha V) \neq 0$, adică $U+\alpha V$ este o matrice inversabilă în $M_n(\mathbb{R})$. Dar $A(U+\alpha V) = AU+\alpha AV = UB+\alpha VB = (U+\alpha V)B$, deci A şi B sunt asemenea şi în $M_n(\mathbb{R})$.

10.58. (i). Conform enunțului avem $A^{rs} + B^{rs} = 2\cdot I_n$.

Dacă m este impar din faptul că AB = BA deducem că

$$A^m + B^m = (A+B)\left(A^{m-1} - A^{m-2}B + ... + B^{m-1}\right).$$

Pentru m = rs obținem imediat că

$$A^m + B^m = (A+B)\left(A^{rs-1} - A^{rs-2}B + ... + B^{rs-1}\right) = 2\cdot I_n$$

şi prin urmare A+B este nesingulară.

(ii). Inversabilitatea matricei $A+B+I_n$ este echivalentă cu faptul că singura soluție a sistemului liniar omogen $(A+B+I_n)x = 0$ este soluția banală x = 0 (din $\mathbb{C}^n$).

Presupunând că v este o soluție, avem (folosind faptul că AB = BA şi inducția matematică)

$$B^k v = (-1)^k (I_n+A)^k v.$$

Astfel, $v = B^{1998}X = (I_n+A)^{1998}v$.

Lemă. Polinoamele $P(X) = (X+1)^{1998}-1$ şi $Q(X) = X^{1997}-1$ sunt prime între ele.

Demonstrație. Fie z_0 o rădăcină comună. Atunci $|z_0|=1$ şi $|z_0+1|=1$.

Prin urmare, 0, 1 şi z_0+1 sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Rezultă de aici că $\arg(z_0+1)\in\{-\pi/3, \pi/3\}$.

Deci $z_0+1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ sau $z_0+1=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

În ambele cazuri, $z_0^{1997}\neq 1$, contradicție.

Conform lemei, există două polinoame R, S$\in\mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că

$$R\cdot[(X+1)^{1998}-1]+S\cdot[X^{1997}-1]=1.$$

Atunci $R(A)[(A+I_n)^{1998}-I_n]+S(A)[A^{1997}-I_n] = I_n$ în $M_n(\mathbb{C})$. Aplicând la cei doi membri pe v, obținem în stânga 0 şi în dreapta v. Deci v = 0.

10.59. ([25]) (i). Cum det(U) = det(V) = 1, deducem că U, V$\in SL_2(\mathbb{Z})$.

Prin calcul direct se verifică egalitățile: $U^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $V^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $U^k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $V^k=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$, pentru orice k$\in\mathbb{Z}$, precum şi egalitatea:

$$(\star)\quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=U^{-1}V^2U^{-1}V^2.$$

Fie acum $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ cu ad-bc = 1.

Vom demonstra prin inducție matematică asupra lui |c| că M poate fi scrisă sub forma cerută de enunț.

Dacă |c| = 0, atunci ad=1 deci a = d = 1 sau a = d = -1, astfel că $M = =\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=U^b$, respectiv $M=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=U^{-1}V^2U^{-1}V^2U^{-b}$ (ținem cont de $(\star)$).

Presupunem acum că $|c|\neq 0$ şi fie q, r$\in\mathbb{R}$ astfel încât a=cq+r cu $0\leq r<c$.

Deoarece $M_1=V\,U^{-q-1}M=\begin{pmatrix}r-c & b-(q+1)d\\ r & b-qd\end{pmatrix}$, conform ipotezei de inducție putem scrie: $M_1=T_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot T_m^{t_m}$ cu $T_i\in\{U, V\}$, $t_i\in\mathbb{Z}$, $1\leq i\leq m$, de unde $M=U^{q+1}V^{-1}M_1=U^{q+1}V^{-1}T_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot T_m^{t_m}$.

(ii). Cum det(W) = -1 deducem că W$\in GL_2(\mathbb{Z})$.

Fie acum M$\in GL_2(\mathbb{Z})$ cu det(M) = 1 sau –1. Dacă det(M) = -1 cum şi det(W) = -1 deducem că det(WM) = (-1)(-1) = 1, deci WM$\in SL_2(\mathbb{Z})$ şi totul rezultă din (i).

Dacă det(M) = 1, atunci M$\in SL_2(\mathbb{Z})$ şi din nou se aplică (i).

10.60. $(AB)^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, deci rang($(AB)^2$) =2 = rang(A(BA)B) $\leq$ rang(BA) $\leq$ 2, deci rang(BA) = 2, adică BA este inversabilă.

Cum $(AB)^3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$, avem $(AB)^3-3(AB)^2+2(AB)=0$.

Înmulțind la stânga cu B şi la dreapta cu A se obține

$$(BA)^4-3(BA)^3+2(BA)^2=0.$$

Cum BA este inversabilă, rezultă $(BA)^2-3(BA)+2I_2 = 0$. Notând cu t = tr(BA), d = =det(BA), avem $(BA)^2-t(BA)+dI_2=0$. Dacă $d\neq 2$, atunci $t\neq 3$ şi ar rezulta $BA=\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2$ de unde $(AB)^2 = ABAB = A\cdot\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2\cdot B = \frac{d-2}{t-3}\cdot AB$, ceea ce se observă că nu are loc.

Deci d=2

10.61.

Avem: $$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+r_1 & a_1+2r_1 & \dots & a_1+(n-1)r_1 \\ a_2 & a_2+r_2 & a_2+2r_2 & \dots & a_2+(n-1)r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-1}+r_{n-1} & a_{n-1}+2r_{n-1} & \dots & a_{n-1}+(n-1)r_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & 2r_1 & \dots & (n-1)r_1 \\ a_2 & r_2 & 2r_2 & \dots & (n-1)r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & 2r_{n-1} & \dots & (n-1)r_{n-1} \\ b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 & \dots & b_n-b_1 \end{vmatrix}=(n-1)!\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ a_2 & r_2 & r_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & r_{n-1} & \dots & r_{n-1} \\ b_1 & b_2-b_1 & \frac{b_3-b_1}{2} & \dots & \frac{b_n-b_1}{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)!\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2-b_1 & c_3 & \dots & c_n \end{vmatrix}=0,$$

dezvoltând pe D după ultima coloană.

10.62. Presupunem prin absurd că $A^2+pA+qI_n=O_n$. Atunci din identitatea $A^2+pA+qI_n=\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}I_n$, rezultă că $\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}I_n$.

Aplicând determinantul în ambii membri obținem $\det\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2=\left(\frac{p^2-4q}{4}\right)^n$.

Membrul stâng al egalității este pozitiv iar membrul drept al egalității este strict negativ deoarece $p^2-4q < 0$ şi n este un număr natural impar, deci am obținut o contradicție.

Rezultă deci că $A^2+pA+qI_n\neq O_n$.

10.63. Se obține $A = B-I_n$ şi condiția $A^n = \alpha A$ se poate scrie astfel: $(B-I_n)^n = \alpha(B-I_n)$ sau $B^n-C_n^1B^{n-1}+\dots+(-1)^nI_n=\alpha B-\alpha I_n$,

sau $B^n-C_n^1B^{n-1}+\dots+(-1)^{n-1}B-\alpha B=-\alpha I_n-(-1)^nI_n$.

De aici putem scrie

$B(B^{n-1}-C_n^1B^{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}I_n-\alpha I_n)=I_n((-1)^{n+1}-\alpha)$, de unde

(1) $B(B^{n-1}-C_n^1B^{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}I_n-\alpha I_n)\cdot\frac{1}{(-1)^{n+1}-\alpha}=I_n$.

Am ținut cont că $\alpha\neq\pm1$ şi $B^nI_n = I_nB^n$. Din relația (1) rezultă că matricea B are inversă la dreapta şi datorită faptului că B comută cu orice putere a sa, rezultă că această inversă la dreapta este inversă şi la stânga. Deci matricea B este inversabilă.

10.64. Notăm $z_k=\cos x_k+i\sin x_k$, $k\in\{1, \dots, n\}$.

Să observăm că $a_{kp}=\dfrac{z_k}{z_p^k}$ şi

$$z_1 z_2 ... z_n = \cos(x_1+x_2+...+x_n)+i\sin(x_1+x_2+...+x_n)=i.$$

Atunci $\det(A)=\begin{vmatrix} \frac{z_1}{z_1} & \frac{z_1}{z_2} & ... & \frac{z_1}{z_n} \\ \frac{z_2}{z_1^2} & \frac{z_2}{z_2^2} & ... & \frac{z_2}{z_n^2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{z_n}{z_1^n} & \frac{z_n}{z_2^n} & ... & \frac{z_n}{z_n^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & ... & \frac{1}{z_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{z_1^{n-1}} & \frac{1}{z_2^{n-1}} & ... & \frac{1}{z_n^{n-1}} \end{vmatrix} = V_n\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},...,\frac{1}{z_n}\right)$, unde V_n este determinantul Vandermonde de ordinul n (s-au dat factori comuni z_1, z_2, …,z_n pe linii şi $\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},...,\frac{1}{z_n}$ pe coloane). Avem aşadar:

$$\det(A)=\prod_{1\le k<p\le n}\left(\frac{1}{z_p}-\frac{1}{z_k}\right)=\frac{\prod\limits_{1\le k<p\le n}(z_k-z_p)}{(z_1z_2...z_n)^{n-1}}=\frac{1}{i^{n-1}}\prod_{1\le k<p\le n}(z_k-z_p)$$

şi $$\overline{\det(A)}=\prod_{1\le k<p\le n}\left(\frac{1}{\overline{z_p}}-\frac{1}{\overline{z_k}}\right)=\prod_{1\le k<p\le n}(z_p-z_k)=\prod_{1\le k<p\le n}(-1)(z_k-z_p)$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{1\le k<p\le n}(z_k-z_p).$$

Atunci det(A)∈ℝ ⇔ $\det(A)=\overline{\det(A)}$ ⇔ $(-1)^{n(n-1)/2}\,i^{n-1}=1$.

Este necesar pentru aceasta ca n-1 să fie par ⇒ n impar.

În plus, este şi suficient: n = 2k+1 ⇒ $(-1)^{(2k+1)2k/2}\,i^{2k}=[(-1)^{2k+1}]^k(-1)^k=(-1)^{2k}=1$, ceea ce încheie soluția.

10.65. Presupunem că det(A+B)≥0 şi vom demonstra că $\det(A^n+B^n)\ge 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ (cealaltă implicaţie fiind evidentă).

Considerăm două cazuri după cum n este par sau n este impar.

a) n par, adică n = 2p, p∈ℕ. Avem:

$$A^{2p}+B^{2p}=(A^p)^2+(B^p)^2=(A^p+iB^p)(A^p-iB^p)=(A^p+iB^p)\overline{(A^p+iB^p)}$$

şi trecând la determinanţi, rezultă:

$$\det(A^{2p}+B^{2p})=\det(A^p+iB^p)\overline{\det(A^p+iB^p)}=|\det(A^p+iB^p)|^2\ge 0.$$

b) n impar, adică n = 2p+1, p∈ℕ. Să notăm cu $x_0=-1$, x_1, x_2, …, x_{2p} rădăcinile complexe ale ecuaţiei binome (1) $x^{2p+1}+1=0$.

Ţinând seama de faptul că matricele A şi B comută, precum şi de relaţiile lui Viète pentru ecuaţia (1), putem scrie:

$$\prod_{j=0}^{2p}(A-x_jB)=A^{2p+1}-\left(\sum_{j=0}^{2p}x_j\right)A^{2p}B+\left(\sum_{0\le j<k\le 2p}x_jx_k\right)A^{2p-1}B^2-...+B^{2p+1}$$
$$=A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece $x_0=-1$ iar rădăcinile x_1, x_2, …, x_{2p} sunt două câte două conjugate, putem scrie identitatea obţinută sub forma:

$$(2)\qquad (A+B)\prod_{j=1}^{2p}(A-x_jB)(A-\overline{x_j}B)=A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece A şi B au elemente reale, avem pentru fiecare j∈{1, 2,… p}:

$$\det(A - x_j B)(A - \overline{x_j} B) = \det(A - x_j B) \cdot \det(A - \overline{x_j} B) =$$
$$= \det(A - x_j B) \cdot \det \overline{(A - x_j B)} =$$
$$= \det(A - x_j B) \cdot \overline{\det(A - x_j B)} = \left|\det(A - x_j B)\right|^2 \geq 0 ,$$

unde am notat cu $\overline{X} \in M_k(\mathbb{C})$ matricea obținută din $X \in M_k(\mathbb{C})$ înlocuind elementele acesteia cu conjugatele lor. Deoarece şi $\det(A+B) \geq 0$, trecând în (2) la determinanți, rezultă

$$\det(A + B)\prod_{j=1}^{2p} \det((A - x_j B)(A - \overline{x_j} B)) = \det(A^{2p+1} + B^{2p+1}) \geq 0 .$$

10.66. Dacă n = 2, atunci se verifică uşor că pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ avem $(A^*)^* = A$. Pentru $n \geq 3$ deosebim cazurile:

i) rang(A) = n. Notăm d=det(A). În acest caz $A^* = d \cdot A^{-1} \Rightarrow \det(A^*) = d^n \cdot \det(A^{-1}) = d^{n-1} \Rightarrow (A^*)^* = d^{n-1} \cdot (A^*)^{-1} = d^{n-1} \cdot d^{-1} \cdot A = d^{n-2} \cdot A$ şi atunci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow d^{n-2} \cdot A = A \Leftrightarrow d^{n-2} = 1$ $\Leftrightarrow$ d este rădăcină de ordinul n-2 a unității;

ii) rang(A) = n-1. În acest caz presupunând $A \neq 0$ rezultă că există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $a_{ij} \neq 0$ (de fapt, există n-1 asemenea elemente) şi fixăm unul dintre ele. Înlocuim elementul a_{ij} fixat anterior cu $a_{ij} + t$ şi astfel rezultă o nouă matrice notată A(t). În acest mod obținem că detA(t) este o funcție polinomială de gradul întâi în t şi detA(0) = 0.

Într-adevăr, dezvoltând detA(t) după linia i, avem:

$$\det A(t) = a_{i1}\Gamma_{i1} + \ldots + (a_{ij} + t)\Gamma_{ij} + \ldots + a_{in}\Gamma_{in} = \det A(0) + t\Gamma_{ij} = t\Gamma_{ij} .$$

Procedând ca în cazul i), avem $A^*(t) = \det A(t)(A(t))^{-1}$, pentru $t \neq 0$ şi $(A^*(t))^* = (\det A(t))^{n-2} A(t)$. Elementele lui $A^*(t)$ sunt funcții continue în t de grad cel mult unu, deci elementele lui $(A^*(t))^*$ sunt polinoame de grad cel mult n-1 în t. Atunci când $t \to 0$ rezultă că elementele lui $(A^*(t))^*$ tind către elementele lui $(A^*(0))^*$, acestea fiind nule.

Deci $(A^*)^* = 0 \Rightarrow A = 0$. Contradicție, şi prin urmare în acest caz A = 0.

iii) rang(A) < n-1. În acest caz $A^* = 0 \Rightarrow (A^*)^* = 0$ şi deci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow A = 0$.

10.67. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt simetrice (adică $A = A^t$ şi $B = B^t$) atunci:

i) Dacă AB este simetrică avem că $(AB)^t = AB \Rightarrow B^t A^t = AB \Rightarrow BA = AB$.
ii) Dacă AB = BA, atunci $(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$.

10.68. Prin calcul direct.

10.69. Considerând egalitățile:

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_n x_{n+1}^n = 0$$

ca un sistem omogen în $a_0, a_1, \ldots, a_n$, cum determinantul său este diferit de zero (fiind un determinant de tip Vandermonde în $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$) deducem că acest sistem admite numai soluția banală, adică

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

10.70. Obținem că $\int_0^1 \widetilde{P}(x)^2 dx = \int_0^1 \widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{P}(x) dx =$

$$= \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\widetilde{P}(x) dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^k \widetilde{P}(x) dx = 0 ,$$

de unde $\widetilde{P}(x)=0$ pentru orice x∈ℝ, adică $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ (conform exercițiului 10.69.).

Pe de altă parte egalitățile $\int_0^1 x^k \widetilde{P}(x)dx = 0$, $0 \le k \le n$, devin:

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + ... + \frac{1}{n+1}a_n = 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + ... + \frac{1}{n+2}a_n = 0 \\ .... \\ \frac{1}{n+1}a_0 + \frac{1}{n+2}a_1 + \frac{1}{n+3}a_2 + ... + \frac{1}{2n+1}a_n = 0 \end{cases}$$

care pot fi interpretate ca un sistem omogen în $a_0, a_1, ..., a_n$ ce admite numai soluția banală, de unde concluzia că determinantul din enunț este nenul.

10.71. Scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} (a-\frac{1}{2})x + by + cz = 0 \\ cx + (a-\frac{1}{2})y + bz = 0 \\ bx + cy + (a-\frac{1}{2})z = 0 \end{cases}.$$

Prin calcul, deducem imediat că:

$$D = \begin{vmatrix} a-\frac{1}{2} & b & c \\ c & a-\frac{1}{2} & b \\ b & c & a-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(a+b+c-\frac{1}{2}\right)\left[\left(a-b-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a-c-\frac{1}{2}\right)^2 + (b-c)^2\right]$$

şi cum a, b, c∈ℤ, iar $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, deducem că $D \neq 0$, adică sistemul considerat admite numai soluția banală $x = y = z = 0$.

10.72. Dacă notăm prin A matricea coeficienților sistemului şi $\alpha = a^2+b^2+c^2+d^2$ atunci din $AA^t = \alpha I_4$ deducem că

$$[\det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$

de unde concluzia că dacă cel puțin unul din cele patru numere este nenul, atunci $\det(A) \neq 0$ şi deci $x = y = z = t = 0$.

10.73. Se ştie că

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & ... & a_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_n & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le k<l\le n}(a_l - a_k) \text{ (Vandermonde)}$$

şi să considerăm sistemul de ecuații în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} a_k^{i-1}x_i = -a_k^n, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Dacă vom considera ecuația de gradul n

$$(2) \quad x^n + \sum_{i=1}^{n} x_i x^{i-1} = 0$$

cu coeficienții $x_1, x_2, \ldots, x_n$, relațiile (1) ne arată tocmai faptul că ecuația (2) are rădăcinile $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Scriind relațiile lui Viète obținem:

$$\sum a_1 a_2 ... a_i = (-1)^i x_{n-i+1}, \text{ i = 1, 2, ..., n,}$$

de unde $x_{n-i+1} = (-1)^i \sum a_1 a_2 ... a_i$, adică $x_i = (-1)^{n-i+1} \sum a_1 a_2 ... a_{n-i+1}$,i = 1, 2, ..., n.

Pe de altă parte, cu ajutorul regulii lui Cramer putem scrie $x_i = \dfrac{D_i}{D}$ deci

$$D_i = x_i D = (-1)^{n-i+1} \sum a_1 a_2 ... a_{n-i+1} D,$$

pentru orice i = 1, ..., n.

Cum $\det(A_j) = (-1)^{n-j+1} D_{j+1}$, j = 1, .., n-1, deducem că

$$\det(A_j) = \sum a_1 a_2 ... a_{n-j} \cdot D = (\sum a_1 a_2 ... a_{n-j}) \cdot \prod_{1 \le k < l \le n} (a_l - a_k),\ 0 \le j \le n.$$

10.74. Scăzând egalitățile din ipoteză, rezultă uşor egalitățile:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)\lambda^2 + (b_1 - b_2)\lambda = c_2 - c_1 \\ (a_1 - a_3)\lambda^2 + (b_1 - b_3)\lambda = c_3 - c_1 \end{cases}.$$

Aceasta înseamnă că sistemul liniar:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y = c_2 - c_1 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y = c_3 - c_1 \end{cases}$$

admite soluția (x, y) = (λ^2, λ).

Determinanții care apar în regula lui Cramer sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_2 - c_1 & b_1 - b_2 \\ c_3 - c_1 & b_1 - b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & c_2 - c_1 \\ a_1 - a_3 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conform regulii lui Cramer avem $\lambda^2 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $\lambda = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

De aici deducem că $\dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \left(\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)^2$, adică, $\Delta_y^2 = \Delta_x \cdot \Delta$, care este tocmai egalitatea de demonstrat.

10.75. ([49]) (i). Dacă A = $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, atunci matricea AA^t are pe diagonala principală elemente de forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, unde i = 1, ..., n. Deoarece $AA^t = O_n$ şi $a_{ij} \in \mathbb{R}$, rezultă $a_{ij} = 0$, pentru orice i, j = 1, ..., n, deci $A = O_n$.

(ii). Conform cu (i) este suficient să arătăm că $(BA-CA)(BA-CA)^t = O_n$.

Dar $(BA-CA)(BA-CA)^t = (BA-CA)(A^tB^t-A^tC^t) =$

$= BAA^tB^t - CAA^tB^t - BAA^tC^t + CAA^tC^t = O_n$.

(iii). Suficiența condiției.

Dacă $AA'B = B$, atunci $X = A'B$ este soluție a sistemului, deci acesta este compatibil.

Necesitatea condiției.

Presupunem că există o soluție $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a sistemului. Atunci $B = AX = (AA'A)X = AA'(AX) = AA'B$.

Să arătăm acum că în cazul când sistemul este compatibil, mulțimea soluțiilor sale este

$$S = \{A'B+Y-A'AY: Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Într-adevăr, pentru orice $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ avem:

$$A(A'B+Y-A'AY) = AA'B+AY-AA'AY = B+AY-AY = B,$$

deci orice matrice din S este soluție a sistemului.

Reciproc, să demonstrăm că orice soluție a sistemului aparține lui S.

Fie X_0 o soluție, deci $AX_0 = B$ sau $A(X_0-A'B) = O_n$, ceea ce arată că $X_0-A'B$ este soluție a sistemului omogen $AX = O_n$. Deci dacă Y este o soluție oarecare a sistemului omogen, avem $Y = Y-A'AY$ (căci $AY = O_n$).

Deci $X_0-A'B = Y-A'AY$, unde $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Rezultă că $X_0 = A'B+Y-A'AY\in S$.

10.76. ([49]) (i). Deoarece A este singulară, sistemul omogen $AX = O_n$ admite o soluție nebanală $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Analog sistemul omogen $A^tY=O_n$ admite o soluție nebanală $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Fie $B = XY^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)$; Evident $B\neq O_n$.

Pe de altă parte, $AB = A(XY^t) = (AX)Y^t = O_n$ şi $BA = (XY^t)A = X(A^tY)^t = O_n$.

(ii). Presupunem că A este singulară. Fie B o matrice nenulă cu $AB = BA = O_n$.

Vom demonstra prin inducție că $(A+B)^p = A^p +B^p$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$.

Pentru p = 1 se verifică. Dacă $(A+B)^p = A^p +B^p$, atunci

$$(A+B)^{p+1} = (A+B)^p(A+B) = A^{p+1}+A^pB+B^pA+B^{p+1} =$$
$$= A^{p+1}+A^{p-1}(AB)+B^{p-1}(BA)+B^{p+1} = A^{p+1}+A^{p-1}\cdot O_n+B^{p-1}\cdot O_n+B^{p+1}= A^{p+1}+B^{p+1}$$

şi demonstrația prin inducție este încheiată.

Presupunem acum că există B nenulă astfel încât $(A+B)^p = A^p + B^p$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$.

Pentru p = 2 se obține relația (1) $AB+BA = O_n$.

Pentru p = 3 avem

$$(2)\ A^3 + B^3 = (A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2+B^2)(A+B) =$$
$$= A^3+A^2B+B^2A +B^3 \Rightarrow A^2B+B^2A = O_n.$$

Din relațiile (1) şi (2) deducem că

$$B^2A = -A^2B = A(-AB) = ABA.$$

Presupunem prin absurd că A este nesingulară şi atunci din ultima relație prin înmulțire la dreapta cu A^{-1}, obținem:

$$(3)\ B^2 = AB.$$

În continuare vom obține $A^2B = A(AB) = -ABA$ şi deci $A^2B^2 = -ABAB =-AB(-BA) = AB^2A$, de unde prin simplificare la stânga cu A, deducem:

$$(4)\ AB^2 = B^2A.$$

Din relația (3) rezultă :

$$(5)\ AB^2 = A(AB) = A^2B.$$

Pe de altă parte, folosind (3), deducem

$$(6)\ B^2A = (AB)A = -A^2B.$$

Din relațiile (4), (5) și (6) rezultă $A^2B = -A^2B$, adică $A^2B = O_n$. Deoarece A este presupusă nesingulară, din ultima relație obținem $B = O_n$, contradicție cu ipoteza. Deci matricea A este neapărat singulară.

10.77. Pentru o valoare proprie $\lambda\in\mathbb{C}$ vom nota prin X_λ spațiul vectorilor proprii.

(i). $\lambda_1 = 1$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, -1) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = 3$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(1, 1) : \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(ii). $\lambda_1 = 7$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, 1) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = -2$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(4, -5) : \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(iii). $\lambda_1 = ai$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, -i) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = -ai$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(1, i) : \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(iv). $\lambda_1 = 1$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, 1, 1) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = \varepsilon$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(3+2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 3+3\varepsilon) : \alpha\in\mathbb{C}\}$ și

$\lambda_3 = \varepsilon^2$ cu $X_{\lambda_3} = \{\alpha(3+2\varepsilon^2, 2+3\varepsilon^2, 3+3\varepsilon^2) : \alpha\in\mathbb{C}\}$,

cu $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(v). Polinomul caracteristic al lui A este

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4.$$

Deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Dacă $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii 1 atunci sistemul omogen ce îl verifică x este:

$$(A-I_3)\ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem omogen este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și are rangul 2, căci $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Alegând pe x_3 și x_4 necunoscute principale iar pe x_1, x_2 necunoscute secundare, făcând pe $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ iar apoi $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ obținem pentru x_3, x_4 sistemele Crameriene $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$ și $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ cu $x_3 = -2$, $x_4 = -4$ și respectiv $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, astfel că

$$x = \alpha(1, 0, -2, -4) + \beta(0, 1, 1, 2) \text{ cu } \alpha, \beta\in\mathbb{R} \text{ astfel încât } x \neq 0.$$

10.78. Fie $P_A(\lambda) = |A-\lambda I_n| = (\lambda_1-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$ și $f = b(X-x_1)\ldots(X-x_n)$ descompunerile polinomului caracteristic al lui A și a lui f în $\mathbb{C}$.

Astfel, $\det(f(A)) = b^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_i - x_i) = f(\lambda_1)\ldots f(\lambda_n)$.

10.79. (i). Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A, din $\det(A-\lambda I_n) = 0$ deducem imediat că $\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}I_n) = 0$ de unde concluzia că valorile proprii ale lui A^{-1} sunt $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$.

(ii). Vom demonstra că valorile proprii ale lui A^2 sunt $\lambda_1^2,...,\lambda_n^2$.

Într-adevăr, dacă $\det(A-\lambda I_n) = (\lambda_1-\lambda) \dots (\lambda_n-\lambda)$, atunci $\det(A + \lambda I_n) = (\lambda_1 + +\lambda) \dots (\lambda_n + \lambda)$ şi astfel că înmulțind cele două egalități şi substituind pe λ^2 cu λ obținem

$$\det(A^2 - \lambda I_n) = (\lambda_1^2-\lambda) \dots (\lambda_n^2-\lambda)$$

de unde concluzia.

(iii). Să demonstrăm că valorile proprii ale matricei A^k ($k\in\mathbb{N}^*$) sunt $\lambda_1^k,...,\lambda_n^k$.

Într-adevăr, în ecuația

$$\det(A-\lambda I_n) = (\lambda_1-\lambda) \dots (\lambda_n-\lambda)$$

înlocuind pe λ cu $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, …, $\lambda\varepsilon^{n-1}$ (unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$), multiplicând aceste n egalități şi înlocuind pe λ^n cu λ obținem că:

$$\det(A^k -\lambda I_n) = (\lambda_1^k-\lambda) \dots (\lambda_n^k-\lambda)$$

de unde concluzia.

(iv). Fie $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \dots + a_{k-1}X + a_k \in\mathbb{C}[X]$. Vom demonstra că valorile proprii ale lui $f(A)$ sunt $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$ ($\lambda_1,\dots,\lambda_n$ fiind valorile proprii ale lui A).

Într-adevăr, procedând ca la soluția exercițiului 10.78. avem:

$$\det(f(A) - \lambda I_n) = (f(\lambda_1) - \lambda) \dots (f(\lambda_n) - \lambda)$$

de unde concluzia.

10.80. Utilizînd cele stabilite la subparagraful 10.2.3 şi ținînd cont şi de exercițiul 10.77. (i) , deducem că $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, deci pentru k natural ,

$$A^k = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}B^{-1} .$$

10.81. Fie $A = \sum_{i=1}^{m} A_i^t \cdot A_i$ şi $P(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$. Să presupunem prin absurd că $\det(A) < 0$, deci $P(0) < 0$. Cum $\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = \infty$, rezultă că ecuația $P(\lambda) = 0$ are cel puțin o rădăcină λ_0 strict negativă. Atunci sistemul omogen $(A-\lambda_0 I_n)X = O_n$ are şi soluții nenule.

Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ o astfel de soluție. Atunci $AX = \lambda_0X$, deci $X^tAX = \lambda_0X^tX$, de unde

$$\sum_{i=1}^{m} (A_i X)^t \cdot (A_i X) = \lambda_0 X^t X .$$

Dar pentru $V=\begin{pmatrix} v_1, & v_2, & ..., & v_n \end{pmatrix}\in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $V^t \cdot V = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \geq 0$.

Atunci $(A_iX)^t(A_iX)^t \geq 0$ pentru $i\in\{1, ..., m\}$ şi $X^tX \geq 0$, deci $\lambda_0 \geq 0$, contradicție.

În concluzie, $\det(A) \geq 0$.

Dacă $A_1, A_2, \dots, A_m$ sunt simetrice, atunci $A_i^t = A_i$ ($1 \leq i \leq m$) şi obținem că

$$\det(A_1^2 + ... + A_m^2) \geq 0 .$$

10.82. „$\Rightarrow$”. $B = A \Rightarrow \det(2A) = 2\det(A) \Rightarrow (2^n-2)\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ (căci $n \geq 2$).

$B = -X\cdot I_n \Rightarrow \det(A-X\cdot I_n) = (-1)^nX^n + \det(A) \Rightarrow \det(A(A-X\cdot I_n)) = (-1)^nX^n$, deci polinomul caracteristic al lui A este $P_A(X) = (-1)^nX^n$.

Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem: $P_A(A) = O_n$, de unde $A^n = O_n$.

„⇐”. Cum $A^n = O_n$ şi $P_A(A)=O_n$, cu $P_A(X)$ polinom de gradul n, obţinem $P_A(X)=X^n$, deci $P_A(-1) = (-1)^n = \det(-A-I_n) = (-1)^n\det(A+I_n) \Rightarrow \det(A+I_n) = 1$. (1)

Cazul 1. $\det(B) \neq 0$. Atunci B este inversabilă, cu inversa B^{-1} şi $B^{-1}A = AB^{-1} \Rightarrow (B^{-1}A)^n = B^{-n}A^n = O_n$. Dar $\det(A+B) = \det(B(B^{-1}A+I_n)) = \det(B)\cdot\det(B^{-1}A+I_n) = \det(B)\cdot 1 = \det(B)$ (am folosit (1) pentru $A \to B^{-1}A$).

Deci, $\det(A+B) = \det(B) = 0+\det(B) = \det(A)+\det(B)$. (2)

Cazul 2. $\det(B) = 0$. Fie $f(X) = \det(I_nX+B)$ şi $g(X) = \det(I_nX+A+B)$.

Evident, $f, g\in\mathbb{C}[X]$, $grad(f) = grad(g) = n$ şi f, g monice.

Cum $A(\lambda I_n+B) = (\lambda I_n+B)A$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{C}$ şi cum $f(\lambda) = \det(\lambda I_n+B) \neq 0$, pentru o infinitate de valori $\lambda\in\mathbb{C}$, conform cazului 1, avem $\det(\lambda I_n+A+B) = \det(A)+\det(\lambda I_n+B) = \det(\lambda I_n+B)$, pentru o infinitate de valori $\lambda\in\mathbb{C}$, altfel spus $f(\lambda) = g(\lambda)$ pentru o infinitate de valori (distincte) $\lambda\in\mathbb{C}$ (cel puţin n), de unde $f(X) = g(X)$.

În particular, obţinem: $\det(B) = f(0) = g(0) = \det(A+B)$, deci

$$(3) \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

Din (2) şi (3) problema este complet rezolvată.

10.83. „⇐”. Evident.

„⇒”. $2x^2-90x+13 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{45 \pm \sqrt{1999}}{2} \in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow$

$$\det(2A^2-90A+13I_2) = \det(2(A-x_1I_2)(A-x_2I_2)) = 0.$$

Coeficienţii ecuaţiei $\det(A-xI_2) = 0$ sunt raţionali, deci dacă x_1 este rădăcină rezultă că şi x_2 este rădăcină şi reciproc $\Rightarrow a+d=45$ şi $ad-bc = \dfrac{13}{2}$ $\Rightarrow$ (conform teoremei Cayley-Hamilton) $\Rightarrow O_2 = A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = A^2-45A+\dfrac{13}{2}I_2$.

Dacă $A\in M_2(\mathbb{R})$ afirmaţia nu mai este adevărată; de exemplu, $A = \begin{pmatrix} \dfrac{45+\sqrt{1999}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.84. Ecuaţia $AX = aX$ este echivalentă cu $(A-aI_n)X = O_n$. Deoarece matricea A are elemente întregi, polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n+\ldots+\det(A)$ este un polinom cu coeficienţi întregi în nedeterminata λ, cu coeficientul dominant ±1.

Atunci o eventuală rădăcină raţională a lui P va fi în mod necesar întreagă.

Cum $a\in\mathbb{Q}$ şi $a\in(0, 1) \Rightarrow a\notin\mathbb{Z} \Rightarrow P(a) \neq 0 \Rightarrow \det(A-aI_n) \neq 0 \Rightarrow$ matricea $A-aI_n$ este inversabilă $\Rightarrow X = O_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

10.85. Fie $A, B\in\Gamma$. Atunci $(-I_n)B = -B\in\Gamma$ şi $A+(-B) = A-B\in\Gamma$.

De asemenea $kA\in\Gamma$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$ şi $A^n\in\Gamma$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Conform teoremei Caley-Hamilton există $\alpha_1, ..., \alpha_n\in\mathbb{Z}$ astfel încât

$$A^n+\alpha_1A^{n-1}+...+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI_n = O_n.$$

Dacă $\det(A) = \pm1$, atunci $\alpha_n = \pm1$, deoarece $\alpha_n = \det(A)$.

Fie $U\in\Gamma$.

(i). $\det(U) = \pm1 \Rightarrow U^n+\alpha_1U^{n-1}+...+\alpha_{n-1}U\pm I_n = O_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow U(U^{n-1}+\alpha_1U^{n-2}+...+\alpha_{n-1}I_n) = \pm I_n$$

deci $U^{-1} = \pm (U^{n-1} + \alpha_1 U^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} I_n) \in \Gamma$.

(ii). det(U) = 0. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, k minim cu proprietatea că

$$U^k + a_1 U^{k-1} + ... + a_{k-1} U + a_k I_n = O_n.$$

Din det(U) = 0, rezultă $a_k = 0$, deci $U^k + a_1 U^{k-1} + ... + a_{k-1} U = O_n$.

Luând $V = U^{k-1} + a_1 U^{k-2} + ... + a_{k-1} I_n$, rezultă $UV = VU = O_n$ şi $V \neq O_n$ (altfel se contrazice minimalitatea lui k). În cazul $U = O_n$, luăm $V \neq O_n$ arbitrară.

10.86. Se ştie că tr(AB-BA) = 0, pentru orice A, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă λ este o valoare proprie a matricei AB-BA (adică ecuația $(AB-BA)X = \lambda X$ are soluție nenulă $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$), atunci dacă $(AB - BA)^2 = I_n$, avem $(AB - BA)^2 X = \lambda^2 X = X$, deci $\lambda \in \{-1, +1\}$, aşadar AB-BA are valorile proprii ± 1. Cum 0 = tr(AB-BA) este suma celor n valori proprii rezultă că dacă există A, B ca în enunț atunci n este număr par.

Pentru n = 2, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfac $(A_2B_2 - B_2A_2)^2 = I_2$, iar pentru n = 2m ($m \in \mathbb{N}^*$), $A = \begin{pmatrix} A_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} B_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_2 \end{pmatrix}$ sunt matrice care satisfac $(AB - BA)^2 = I_n$, deci numerele $n \in \mathbb{N}^*$ căutate sunt cele pare.

10.87. Fie $A_i = \{ z \in \mathbb{C} : z^{a_i} = 1, i = 1, ..., n \}$.

Avem $| A_i | = a_i = d_{ii}$, $| A_i \cap A_j | = d_{ij}$. Dacă $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ z_1, z_2, ..., z_n \}$, ataşăm fiecărei mulțimi A un vector $V_i \in \mathbb{R}^N$, $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{iN})$, unde $v_{ik} = \begin{cases} 0, & dacă\ z_k \notin A_i \\ 1, & dacă\ z_k \in A_i \end{cases}$.

Avem $d_{ij} = | A_i \cap A_j | = (V_i) \cdot (V_j)^t$, deci considerând matricea $M \in M_{n,N}(\{0, 1\})$, $M = (v_{ik})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,N}}}$, avem $D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = M \cdot M^t$.

Arătăm că, în general, $\det(M \cdot M^t) \geq 0$, pentru orice matrice M (nu neapărat pătratică). Considerăm polinomul $P(\lambda) = \det(M \cdot M^t + \lambda I_n)$ care nu are rădăcini pozitive (dacă ar există $\lambda > 0$ astfel încât $\det(M \cdot M^t + \lambda I_n) = 0$ sistemul omogen $(M \cdot M^t + \lambda I_n)X = O_n$ ar avea o soluție nebanală X_0, deci $M \cdot M^t \cdot X_0 = -\lambda X_0$, $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow (X_0)^t \cdot M \cdot M^t \cdot X_0 = -\lambda \cdot (X_0)^t \cdot X_0 < <0 \Leftrightarrow [(X_0)^t \cdot M] \cdot [(X_0)^t \cdot M]^t < 0 \Leftrightarrow W^t \cdot W < 0$, care este falsă).

Deci $P(\lambda) \geq 0$ pentru $\lambda \geq 0$ şi punând $\lambda = 0$ obținem $\det(D) = \det(M \cdot M^t) \geq 0$.

10.88. Fie matricele $I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}$. Sistemul omogen cu n^2+1 necunoscute şi n^2 ecuații: $x_0 I_n + x_1 A + x_2 A^2 + ... + x_{n^2} A^{n^2} = 0$ admite şi soluții nebanale, deci există un polinom nenul $f \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f(A) = O_n$.

Fie f şi g polinoamele de grad minim cu proprietatea că $f(A) = g(C) = O_n$. Atunci $f(0), g(0) \neq 0$. Într-adevăr, dacă f(0) = 0, atunci $f(X) = Xf_1(X)$ şi deci $Af_1(A) = O_n$. Cum $\det(A) \neq 0 \Rightarrow f_1(A) = O_n$, ceea ce contrazice minimalitatea gradului lui f.

Fie $h \in \mathbb{C}[X]$, h = fg, $h = \sum_{k=0}^{t} a_k X^k$. Cum $h(A) = h(C) = O_n \Rightarrow h(A)B = h(C)D \Rightarrow$ $(\sum_{k=0}^{t} a_k A^k)B = (\sum_{k=0}^{t} a_k C^k)D$. Cum $A^k B = C^k D$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $a_0 B = a_0 D$.

Dar $a_0 = h(0) = f(0)g(0) \neq 0$, deci B = D.

10.89. Ecuația caracteristică $\lambda^2 - (a+d)\cdot\lambda + \Delta_A = 0$ (vezi paragraful 10.3.2., aplicația 1) devine în acest caz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Astfel $A^n = n\cdot 2^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} - 4\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} n\cdot 2^{n-1} - 4\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2} & -n\cdot 2^{n-1} \\ n\cdot 2^{n-1} & 3n\cdot 2^{n-1} - 4\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}\end{pmatrix}.$$

10.90. Ecuația atașată matricei A este $\lambda^2 - 2\alpha\cdot\lambda + \alpha^2 - \beta^2 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = \alpha + \beta, \lambda_2 = \alpha - \beta$.

Astfel $A^n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\cdot A - \Delta_A\cdot\dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\cdot I_2$.

$$= \frac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2\beta}\cdot A - \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\cdot\frac{(\alpha+\beta)^{n-1} - (\alpha-\beta)^{n-1}}{2\beta}\cdot I_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2\beta} & \dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} \\ \dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} & \alpha\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2\beta}\end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha+\beta)^n(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)^n(\alpha+\beta)}{2\beta} & 0 \\ 0 & \dfrac{(\alpha+\beta)^n(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)^n(\alpha+\beta)}{2\beta}\end{pmatrix}.$$

Cum $\alpha\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2\beta} - \dfrac{(\alpha+\beta)^n(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta)^n(\alpha+\beta)}{2\beta} =$

$$= \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n\right],$$

deducem $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n}{2} & \dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} \\ \dfrac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2} & \dfrac{(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n}{2}\end{pmatrix}$.

10.91. Pentru n = 1 putem lua $x_1 = 1$ și $y_1 = 0$.

Se constată prin calcul direct că $A^2 = A + 2I_3$, $A^3 = 3A + 2I_3$.

Presupunând $A^n = x_n\cdot A + y_n\cdot I_3$ deducem imediat că $A^{n+1} = x_{n+1}\cdot A + y_{n+1}\cdot I_3$, cu $x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = 2x_n$, pentru orice n $\geq$ 2.

Pentru șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avem relația de recurență $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$, pentru orice n $\geq$ 1, de unde, ținând cont că $x_1 = x_2 = 1$, deducem $x_n = -\frac{1}{3}\cdot(-1)^n + \frac{1}{3}\cdot 2^n$; de asemenea, $y_n = \frac{1}{3}\cdot 2^n + \frac{2}{3}\cdot(-1)^n$, iar de aici reprezentarea din enunț.

10.92. Pentru n = 1 luăm $x_1 = 1$ și $y_1 = 0$.

Cum $A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, deducem $x_2 = 2$ şi $y_2 = 1$. Presupunând că $A^n=\begin{pmatrix}1&x_n&y_n\\0&1&x_n\\0&0&1\end{pmatrix}$, deducem $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1&x_{n+1}&y_{n+1}\\0&1&x_{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}$ cu $x_{n+1}=x_n+1$ şi $y_{n+1}=x_n+y_n$; din $x_{n+1}=x_n+1$ deducem $x_n=n$ iar din $y_{n+1}=y_n+n$, deducem $y_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

10.93. Se arată uşor că dacă notăm prin f(x) valoarea determinantului, atunci $f'(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde va rezulta că f nu depinde de x.

10.94. Avem: $f(1)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}=0$ iar $f'(x)=\begin{vmatrix}0&1&2x&3x^2\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}$,

$f''(x)=\begin{vmatrix}0&0&2&6x\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}$. Deci $f'(1)=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}=0$, deoarece dacă adunăm a doua linie la prima linie, obținem cea de a treia linie a determinantului, iar

$$f''(1)=\begin{vmatrix}0&0&2&6\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}0&0&1&3\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\end{vmatrix}.$$

Pentru a calcula $f''(1)$ scădem prima coloană din celelalte şi obținem

$$f''(1)=2\cdot\begin{vmatrix}0&0&1&3\\1&0&0&0\\1&1&2&3\\1&3&8&15\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}0&1&3\\1&2&3\\3&8&15\end{vmatrix}=(-6)\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&1\\3&8&5\end{vmatrix}=0,$$

deoarece coloana a doua este suma celorlalte coloane.

Cum $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$, rezultă că f(x) este de forma $f(x) = a(x-1)^3$ cu $a\in\mathbb{R}$.

10.95. Fie $F : [a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție definită astfel:

$$F(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\x&x_0&x_1&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots.\\x^n&x_0^n&x_1^n&\dots&x_n^n\\f(x)&f(x_0)&f(x_1)&\dots&f(x_n)\end{vmatrix},\text{ pentru orice } x\in[a, b].$$

Se constată uşor că

$$F^{(n)}(x)=\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1\\0&x_0&x_1&\dots&x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots.\\n!&x_0^n&x_1^n&\dots&x_n^n\\f^{(n)}(x)&f(x_0)&f(x_1)&\dots&f(x_n)\end{vmatrix},\text{ pentru orice } x\in[a, b].$$

Evident, $F(x_0) = F(x_1) = \ldots F(x_n) = 0$, deci aplicând lui F de n ori teorema lui Rolle, rezultă că există $c \in (a, b)$, astfel încât $F^{(n)}(c) = 0$. Scriind $F^{(n)}(c) = 0$ şi dezvoltând determinantul după prima coloană se obţine

$$n!\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \ldots & f(x_n) \end{vmatrix} - f^{(n)}(c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{n} & x_1^{n} & \ldots & x_n^{n} \end{vmatrix} = 0,$$

iar de aici rezultă imediat relaţia cerută.

10.96. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \ldots & x \\ x & x+a_2 & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots & x+a_n \end{vmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

Se observă imediat că $f''(x) = 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci există $A, B\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=Ax+B$, $x\in\mathbb{R}$.

Evident avem: $B = f(0) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\ldots a_n$ iar

$$A = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2a_3\ldots a_n + a_1a_3\ldots a_n + \ldots + a_1a_2\ldots a_{n-1}.$$

.

10.97. Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x+a_{11} & x+a_{12} & \ldots & x+a_{1n} \\ x+a_{21} & x+a_{22} & \ldots & x+a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x+a_{n1} & x+a_{n2} & \ldots & x+a_{nn} \end{vmatrix}$.

Se observă imediat că $f''(x) = 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci există $A, B\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=Ax+B$, $x\in\mathbb{R}$.

Deducem $B = f(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ iar

$$A = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Index alfabetic

Index autori probleme

BIBLIOGRAFIE

[1] Albu, T., Ionescu, I. *Principiul includerii şi excluderii*, Gazeta matematică, Seria B, nr. 6 (1969).

[2] Banea, H. *Probleme de matematică traduse din revista sovietică Kvant*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[3] Beckenbach, E., Bellman, R. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[4] Buşneag, D. *Asupra calculului unor determinanți*, Gazeta matematică, Seria B, nr. 6 (1978).

[5] Buşneag, D., Maftei, I. V. *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983.

[6] Buşneag, D., Leonte, Al., Vladimirescu, I. *Culegere de probleme pentru admiterea în învățămîntul superior şi pregătirea profesorilor de matematică din învățămîntul preuniversitar*, Ed. Sitech, Craiova, 1993.

[7] Buşneag, D. *Teoria Grupurilor*, Ed. Universitaria, Craiova, 1997.

[8] Buşneag, D. *Capitole speciale de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 1997.

[9] Buşneag, D. (Coordonator) *Concursul interjudețean de matematică pentru echipe de elevi, Gh Titeica, 2000-2005*, Ed. Reprograph, Craiova, 2000-2005.

[10] Buşneag, D., Dincă, A., Ebâncă, D., Niculescu, C. P., Popescu, M., Vladimirescu, I., Vraciu, G. *Concursul de matematică „Gheorghe Țițeica" 1979-1998*, Ed. Gil, Zalău, 1999.

[11] Buşneag, D., Piciu, D. *Algebră liniară*, Ed. Universitaria, Craiova, 2001.

[12] Buşneag, D., Piciu, D. *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[13] Buşneag, D., Chirteş, Fl., Piciu, D. *Probleme de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[14] Buşneag, D., Chirteş, Fl., Piciu, D. *Probleme de algebră liniară*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[15] Buşneag, D., Chirteş, Fl., Piciu, D. *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Ed. Universitaria, Craiova, 2003.

[16] Buzeţeanu, S., Niţă, C. *Determinantul produsului a două matrice. Regula lui Laplace*, Gazeta matematică (Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică) nr 3-4 (1985) şi 1 (1987).

[17] Cohen, P. M. *Universal Algebra*, Harper and Row, 1965.

[18] Cuculescu, I. *Olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984.

[19] Drâmbe, O. M. *Inegalităţi – idei şi metode*, Ed. Gil, Zalău, 2003.

[20] Hall, M., Jr. *The theory of Groups*, Blaisdell Publishing Company, 1959.

[21] Honsberger, R. *Mathematical gems*, The Mathematical Association of America, vol. 1, 1973.

[22] Iaglom, A. M., Iaglom, I. M. *Probleme neelementare tratate elementar*, Ed. Tehnică, Bucureşti,1983.

[23] Iliescu, I., Ionescu, B., Radu, D. *Probleme de matematică pentru admiterea în învăţămîntul superior*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[24] Ilyin, V. A., Poznyak, E. G. *Linear algebra*, Mir Publishers Moscow, 1986.

[25] Ion, D. I. *Structura grupurilor* $SL_n(\mathbb{Z})$ *şi* $GL_n(\mathbb{Z})$, Gazeta matematică (Perfecţionare metodică şi metodologică), nr.1-2 (1980).

[26] Ion, I. D., Radu, N. *Algebra,* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[27] Ion, I. D., Năstăsescu, C., Niţă, C. *Complemente de Algebră,* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1994.

[28] Litllewood, G. H., Polya, G. *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.

[29] Mitrinovic, D. S. *Analitic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.

[30] Morozova, A. E., Petakov, I. S., Skortov, V. A. *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.

[31] Năstăsescu, C. *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

[32] Năstăsescu, C. *Asupra grupurilor finite*, Gazeta matematică (Perfecţionare metodică şi metodologică), nr. 4 (1981).

[33] Năstăsescu, C., Niță, C. *Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.

[34] Năstăsescu, C., Țena, M., Dăncescu, S. *Ecuația de forma $\sigma^p = e$ în grupul simetric S_n (p prim)*, Gazeta matematică (Perfecționare metodică şi metodologică) , nr.3-4 (1983).

[35] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. *Bazele algebrei*, Vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

[36] Năstăsescu, C., Țena, M., Andrei, G., Odărăşanu, I. *Probleme de structuri algebrice,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1988.

[37] Năstăsescu, C., Niță, C., Brandiburu, M., Joița, D *Exerciții de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1992.

[38] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. *Aritmetică şi algebră,* Ed. Didactică şi Pedagogică S. A., Bucureşti, 1993.

[39] Niculescu, C. P., Persson, L-E. *Convex functions. Basic theory and applications*, Springer, 2005.

[40] Panaitopol, L., Băndilă, V., Lascu, M. *Inegalități*, Ed. Gil, Zalău, 1995.

[41] Panaitopol, M. *Ridicarea la putere a matricilor pătratice de ordinul 2*, Gazeta Matematică, Seria B, nr. 3 (1975).

[42] Pimsner, M., Popa, S. *Principiul „cutiei" în geometrie*, Gazeta matematică, Seria B, nr. 7 (1975).

[43] Pimsner, M., Popa, S. *Probleme de geometrie elementară*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[44] Popescu, D., Oboroceanu, G. *Exerciții şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria mulțimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[45] Popescu, D, Vraciu, C. *Elemente de teoria grupurilor finite,* Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[46] Radu, N. şi alții**.** *Algebra,* Ed. All, Bucureşti, 1998.

[47] Rotman, J. J. *The theory of Groups*(*An introduction*), Allyn and Bacon Inc., 1966.

[48] Sirețchi, Gh. *Calcul diferențial şi integral*, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[49] Tomescu, I. (Coordonator) şi alții. *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee* (1950 – 1990), Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1992.

[50] Colecția *Gazeta matematică*, 1964-2006.